# 第1章　漸化式の基本

## 1.1　等差・等比・階差・階比型

**【例 1.1】**

$n$ を自然数として，数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = \dfrac{3}{2}$，$a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n + \dfrac{1}{2^n}$ によって定められている．

(1) $a_2$ を求めよ．
(2) $b_n = 2^n a_n$ とおくとき，$b_{n+1}$ を $b_n$ を用いて表せ．
(3) $b_n$ を $n$ を用いて表せ．また，$a_n$ を $n$ を用いて表せ．
(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ．

（関西大）

[解]

(1) $a_2 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$ //

(2) $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2^n}$

両辺 $2^{n+1}$ をかけて

$2^{n+1}a_{n+1} = 2^n a_n + 2$

$b_n = 2^n a_n$ とおくと $b_1 = 2\cdot a_1 = 3$

$b_{n+1} = b_n + 2$ // ← 等差型

(3) $\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 3$ 公差2の等差数列より

$b_n = 3 + 2(n-1)$

$= 2n+1$

$a_n = \frac{b_n}{2^n}$ より

$a_n = \frac{2n+1}{2^n}$ //

(4) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく

$S_n = 3\cdot\frac{1}{2} + 5\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + (2n+1)\cdot\frac{1}{2^n}$

$-)\ \frac{1}{2}S_n = \qquad 3\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + (2n-1)\cdot\frac{1}{2^n} + (2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

$\frac{1}{2}S_n = 3\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{2^2} + \cdots + 2\cdot\frac{1}{2^n} - (2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

$= \frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} - (2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

$= \frac{1}{2} + \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} - (2n+1)\cdot\frac{1}{2^{n+1}}$

$= \frac{5}{2} - (2n+5)\frac{1}{2^{n+1}}$

$\therefore S_n = 5 - \frac{2n+5}{2^n}$ //

<point>

① 等差型

$a_{n+1}=a_n+d$ ($d$ : 定数)

$a_{n+1}-a_n=d$ より $\{a_n\}$ は

初項 $a_1$, 公差 $d$ の等差数列

注:

そのままでうまくいきそうにないときは

① 両辺に $f(n)$ (1次式, 2次式, $a^n$ …) をかける

② を $f(n)$ 〃 で割る

③ 逆数をとる

④ 対数をとる

などが漸化式を解くときの定石である

**1**. $a_1=1$, $5a_na_{n+1}=a_n-a_{n+1}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の $a_2$, $a_3$ の値を求めよ．また，$a_n$ を $n$ で表せ．

(摂南大)

**2**. $a_1=2$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定められる数列 $\{a_n\}$ の第 50 項を求めよ．

(防衛医大)

**【例 1.2】**

次の関係式 $a_1 = -1$, $a_{n+1} = 2a_n(1-a_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ は，$1-2a_{n+1} = (1-2a_n)^2$ を満たすことを示し，一般項 $a_n$ を求めよ．（信州大）

[解]

$$1-2a_{n+1} = 1-4a_n(1-a_n)$$
$$= 1-4a_n+4a_n^2$$
$$= (1-2a_n)^2$$

$1-2a_1 = 3 > 0.$

漸化式から $1-2a_n > 0$ $(n=2, 3, \cdots)$

より

両辺底3の対数をとって

$$\log_3(1-2a_{n+1}) = 2\log_3(1-2a_n)$$

$b_n = \log_3(1-2a_n)$ とおくと $b_1 = 1$

$b_{n+1} = 2b_n$ ← 等比型

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$

公比 2 の等比数列より

$$b_n = 1\cdot 2^{n-1}$$
$$= 2^{n-1}$$

$b_n = \log_3(1-2a_n)$ より

$$1-2a_n = 3^{b_n}$$

$$\therefore a_n = \frac{1-3^{2^{n-1}}}{2}$$ //

〈point〉

① 等比型

$a_{n+1} = ra_n$ （$r$：定数, $r \neq 0$）

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = r$ より $\{a_n\}$ は

初項 $a_1$, 公比 $r$ の等比数列.

**【例 1.3】**

数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 2^n - 3n + 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定めるとき，$a_{10}$ を求めよ． （工学院大）

[解]

$a_{n+1} = a_n + 2^n - 3n + 1$ ← 階差型

$a_{n+1} - a_n = 2^n - 3n + 1$ ← 階差数列

$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(2^k - 3k + 1) \quad (n \geqq 2)$

$= 1 + \dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1} - 3\cdot\dfrac{(n-1)n}{2} + (n-1)$

$= 2^n - 2 - \dfrac{1}{2}n\{3(n-1)-2\}$

$= 2^n - \dfrac{1}{2}n(3n-5) - 2$

$n=1$ のときも成立

$a_n = 2^n - \dfrac{1}{2}n(3n-5) - 2 \quad (n \geqq 1)$

$a_{10} = 2^{10} - \dfrac{1}{\cancel{2}}\cdot \overset{5}{\cancel{10}}\cdot 25 - 2 = 897$ //

<point>

① 階差型

$a_{n+1} = a_n + f(n)$

$a_{n+1} - a_n = f(n)$

$f(n)\ (n=1,2,3,\cdots)$ を $\{a_n\}$ の階差数列と考えればよい

**【例 1.4】**

$S_n$ は数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $n$ 項までの和とする．第 $n$ 項 $a_n$ と $S_n$ は $S_n + na_n = 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている．

(1) $a_1$，$a_2$，$a_3$ を求めよ．

(2) $a_n$ と $S_n$ を $n$ を用いて表せ．　（香川大）

[解]

(1) $S_n + na_n = 1$

$n=1$ を代入して

$S_1 + a_1 = 1$

$2a_1 = 1 \quad \therefore a_1 = \dfrac{1}{2}$ //

$n \geqq 2$ のとき

$S_n + na_n = 1 \cdots ①$

$S_{n-1} + (n-1)a_{n-1} = 1 \cdots ②$

①−② より

$\underbrace{(S_n - S_{n-1})}_{= a_n} + na_n - (n-1)a_{n-1} = 0$

$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$

$\therefore a_n = \dfrac{n-1}{n+1}a_{n-1}$

よって

$a_2 = \dfrac{1}{3}a_1 = \dfrac{1}{6}$

$a_3 = \dfrac{2}{4}a_2 = \dfrac{1}{12}$ //

(2) $a_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cdot a_{n-1}$

$= \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot a_{n-2}$

$\vdots$

$= \dfrac{n-1}{n+1}\cdot\dfrac{n-2}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-1}\cdots\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{1}{3}a_1$

$= \dfrac{1}{n(n+1)}$ // ($n=1$ のときも成立)

$S_n + na_n = 1$ より

$S_n = 1 - na_n$

$= 1 - n\cdot\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ //

[別解]

$a_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ から求めてもよい。

[別解]

$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1}$

両辺に $n$ をかけて

$(n+1)na_n = n(n-1)a_{n-1}$

$b_n = (n+1)na_n$ とおくと $b_1 = 2\cdot a_1 = 1$

$b_n = b_{n-1}$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 1$ の定数列より

$b_n = 1$

$a_n = \dfrac{b_n}{n(n+1)}$

$= \dfrac{1}{n(n+1)}$ //

<point>

① 階比型

$a_{n+1} = f(n)a_n$

[解1]

$a_{n+1} = f(n)a_n$

$= f(n)f(n-1)a_{n-1}$

$\vdots$

$= f(n)f(n-1)\cdots f(1)a_1$

[解2]

両辺に適当な数、文字をかけて（割って）

$g(n+1)a_{n+1}$, $g(n)a_n$ の形を作る