1.2　基本型

【例 2.1】

次の条件によって定まる数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_1=3,\ a_{n+1}=2a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $b_1=2,\ b_{n+1}=2b_n+n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3) $c_1=2,\ c_{n+1}=2c_n+\dfrac{1}{2}n(n-1)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　（同志社大）

[解]

(1) $a_{n+1}=2a_n+1$　　$\alpha=2\alpha+1$　∴$\alpha=-1$

$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$\{a_n+1\}$は初項 $a_1+1=4$ 公比2の等比数列より

$a_n+1=4\cdot 2^{n-1}$

∴$a_n=2^{n+1}-1$ //

注

$\{a_n\}$: 3, 7, 15, 31, ……

$\{a_n+1\}$: 4, 8, 16, 32, … ←等比!!

ということ

[別解] 階差法

$a_{n+1}=2a_n+1$ …①

$a_{n+2}=2a_{n+1}+1$ …②

②−① より

$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$

$\{a_{n+1}-a_n\}$は初項 $a_2-a_1=4$ 公比2の等比数列より

$a_{n+1}-a_n=4\cdot 2^{n-1}$

∴$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}$ ←階差数列

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^{k+1}$ $(n\geqq 2)$

$=3+\dfrac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}$

$=2^{n+1}-1$

これは$n=1$のときも成り立つから

$a_n=2^{n+1}-1$ $(n\geqq 1)$ //

〈point〉

①基本型 $a_{n+1}=pa_n+q$ $(p\neq 1,\ q\neq 0)$

(1) 特性解利用法 オススメ

$a_{n+1}=pa_n+q$ …①

分ける

$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形すれば…②

$\{a_n-\alpha\}$は等比数列

・αの求め方

②を展開すると

$a_{n+1}-\alpha=pa_n-p\alpha$

∴$a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$

①と比較して

$q=-p\alpha+\alpha$

∴$\alpha=p\alpha+q$ ← ①のa_{n+1}とa_nをαとしただけ

この方程式を特性方程式といい、解αを特性解という。

(2) 階差法

別解参照

(2) $b_{n+1}=2b_n+n$ …①

分ける

$b_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=2\{b_n-(\alpha n+\beta)\}$ と変形

$b_{n+1}=2b_n-\alpha n+\alpha-\beta$ …②

①, ②より

$-\alpha n+\alpha-\beta=n$

これがすべてのnで成り立つためには

$\begin{cases}-\alpha=1\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$　∴$\alpha=-1,\ \beta=-1$

$b_{n+1}+(n+1)+1=2(b_n+n+1)$

$\{b_n+n+1\}$ は初項 $b_1+2=4$ 公比 2 の等比数列より

$$b_n+n+1=4\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore b_n=2^{n+1}-n-1$$

[別解] 階差法

$b_{n+1}=2b_n+n$ …①

$b_{n+2}=2b_{n+1}+(n+1)$ …②

②−① より

$$b_{n+2}-b_{n+1}=2(b_{n+1}-b_n)+1$$

$d_n=b_{n+1}-b_n$ とおくと $d_1=b_2-b_1=3$

$d_{n+1}=2d_n+1$ ← (1)の a_n が d_n になっただけ

(1)より

$$d_n=2^{n+1}-1$$

$d_n=b_{n+1}-b_n$ より

$b_{n+1}-b_n=2^{n+1}-1$ ← 階差数列

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-1)\quad(n\geqq 2)$$

$$=2+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-(n-1)$$

$$=2^{n+1}-n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$$b_n=2^{n+1}-n-1\quad(n\geqq 1)$$

<point>

① $a_{n+1}=pa_n+f(n)\quad(p\neq 1)$

$f(n)=an+b$ (n の1次式)

(1) $a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ と変形すれば $\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$ は等比数列　+でもよい

(2) 階差法

(3) $c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$ …①　分ける

$c_{n+1}-(\alpha(n+1)^2+\beta(n+1)+\gamma)=2\{c_n-(\alpha n^2+\beta n+\gamma)\}$ と変形

$c_{n+1}=2c_n-\alpha n^2+(2\alpha-\beta)n+(\alpha+\beta-\gamma)$ …②

①、②より

$$-\alpha n^2+(2\alpha-\beta)n+(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n$$

これがすべての n で成り立つためには

$$\begin{cases}-\alpha=\frac{1}{2}\\ 2\alpha-\beta=-\frac{1}{2}\\ \alpha+\beta-\gamma=0\end{cases}\quad\therefore \alpha=-\frac{1}{2},\ \beta=-\frac{1}{2},\ \gamma=-1$$

$$c_{n+1}+\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{2}(n+1)+1=2\left(c_n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\right)$$

$\{c_n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\}$ は初項 $c_1+2=4$ 公比 2 の等比数列より

$$c_n+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1=4\cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore c_n=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$$

[別解] 階差法

$c_{n+1}=2c_n+\frac{1}{2}n(n-1)$ …①

$c_{n+2}=2c_{n+1}+\frac{1}{2}n(n+1)$ …②

②−① より

$$c_{n+2}-c_{n+1}=2(c_{n+1}-c_n)+n$$

$e_n=c_{n+1}-c_n$ とおくと $e_1=c_2-c_1=2$

$e_{n+1}=2e_n+n$ ← (2)の b_n が e_n になっただけ

(2)より

$$e_n=2^{n+1}-n-1$$

$e_n=c_{n+1}-c_n$ より

$c_{n+1}-c_n=2^{n+1}-n-1$ ← 階差数列

$$c_n=c_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}-k-1)\quad(n\geqq 2)$$

$$=2+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}-\frac{1}{2}(n-1)n-(n-1)$$

$$=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-1$$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$c_n = 2^{n+1} - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - 1$ $(n \geqq 1)$ //

注.
本問は階差法でやれば(3)は(2)を(2)は(1)を使えるので階差法でやった方がよいが(3)が単体で出てきた時に階差法は階差型を2回解くことになるので面倒である

<point>

① $a_{n+1} = pa_n + f(n)$ $(p \neq 1)$

$f(n) = an^2 + bn + c$ (nの2次式)

(1) $a_{n+1} - (\alpha(n+1)^2 + \beta(n+1) + \gamma) = p\{a_n - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\}$

と変形すれば $\{a_n - (\alpha n^2 + \beta n + \gamma)\}$ は等比数列

+でもよい

(2) 階差型

1. 数列 $\{a_n\}$ を次の漸化式で定義する.

$a_1 = 2,\ 2a_{n+1} - 3a_n + 1 = 0\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ の小数部分を b_n とおく. 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{b_k}$ を求めよ.

(津田塾大)

2. (1) $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3a_n + 2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(2) $b_1 = 1,\ b_{n+1} = 3b_n + 2n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ.

(3) $c_1 = 1,\ c_{n+1} = \dfrac{c_n}{2nc_n + 3}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{c_n\}$ の一般項 c_n を求めよ.

(九州工業大)

3. 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 3,\ a_{n+1} = 2a_n - n^2 + n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義されている. 数列 $\{a_n - f(n)\}$ が公比 2 の等比数列になるように n の 2 次式 $f(n)$ を定め, a_n を n の式で表せ.

(関西大)

【例 2.2】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=3$, $a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとき，一般項 a_n を求めよ．（信州大）

[解]

$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$

両辺 3^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{a_n}{3^n}+1$$

$b_n=\dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと $b_1=\dfrac{a_1}{3}=1$

$b_{n+1}=\dfrac{2}{3}b_n+1$ ← 基本型 $\quad \alpha=\dfrac{2}{3}\alpha+1$ $\quad \therefore \alpha=3$

$b_{n+1}-3=\dfrac{2}{3}(b_n-3)$

$\{b_n-3\}$ は初項 $b_1-3=-2$

公比 $\dfrac{2}{3}$ の等比数列より

$b_n-3=-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$\therefore b_n=3-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$a_n=3^nb_n$ より

$a_n=3^n\cdot\left\{3-2\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$

$=3^{n+1}-3\cdot2^n=3\cdot(3^n-2^n)$ //

[別解]

$a_{n+1}=2a_n+3^{n+1}$

両辺 2^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと $b_1=\dfrac{a_1}{2}=\dfrac{3}{2}$

$b_{n+1}=b_n+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}$ ← 階差型

$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}$ $(n\geqq2)$

$=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\frac{9}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}}{\frac{3}{2}-1}$

$=\dfrac{3}{2}+2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{9}{2}$

$=2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}-3$ （$n=1$のときも成立）

$a_n=2^nb_n$ より

$a_n=2^n\left\{2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}-3\right\}$

$=3^{n+1}-3\cdot2^n=3(3^n-2^n)$ //

<point>

① $a_{n+1}=pa_n+f(n)$ $(p\neq1)$, $f(n)=q^n$

(1) 両辺 q^{n+1} で割って $b_n=\dfrac{a_n}{q^n}$ とおけば 基本型

(2) 両辺 p^{n+1} で割って $b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とおけば 階差型

【例 2.3】

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 8{a_n}^2\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $b_n = \log_2 a_n$ とおく．b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) $P_n = a_1 a_2 a_3 \cdots a_n$ とおく．数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ．

(4) $P_n > 10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ．（大阪大）

[解]

(1) $a_{n+1} = 8a_n^2$

$a_1 > 0$ かつ漸化式から $a_n > 0\ (n \geqq 2)$

両辺底2の対数をとって

$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2$

$\log_2 a_{n+1} = 2\log a_n + 3$

$b_n = \log_2 a_n$ とおくと $b_1 = \log_2 a_1 = 1$

$b_{n+1} = 2b_n + 3$ //

(2) $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$　　$\alpha = 2\alpha + 3$　$\therefore \alpha = -3$

$\{b_n + 3\}$ は初項 $b_1 + 3 = 4$ 公比2の等比数列より

$b_n + 3 = 4 \cdot 2^{n-1}$

$\therefore b_n = 2^{n+1} - 3$ //

(3) $a_n = 2^{b_n}$ より

$a_n = 2^{2^{n+1} - 3}$

$P_n = 2^{b_1} \cdot 2^{b_2} \cdot \cdots \cdot 2^{b_n}$

$= 2^{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$

ここで

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1} - 3)$$

$$= \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n$$

$$= 2^{n+2} - 3n - 4$$

より

$P_n = 2^{2^{n+2} - 3n - 4}$ //

(4) $2^9 < 10^3 < 2^{10}$ より ← $2^{10} = 1024$ は常識として知っておきたい

$9\log_{10} 2 < 3 < 10\log_{10} 2$

$\therefore \dfrac{3}{10} < \log_{10} 2 < \dfrac{1}{3}$

$P_n > 10^{100}$ となるとき

$2^{2^{n+2} - 3n - 4} > 10^{100}$

両辺底10の対数をとって

$\log_{10} 2 \cdot (2^{n+2} - 3n - 4) > 100$

$2^{n+2} - 3n - 4 > \dfrac{100}{\log_{10} 2}$

$300 < \dfrac{100}{\log_{10} 2} < \dfrac{1000}{3}$ より ← 指数関数の不等式なので多少誤差が大きくてもよいという感覚が大事

これを満たす最小の n は $n = 7$ //

<point>

① 対数型

【例 2.4】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=\dfrac{1}{4}$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+5}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められるとき,

(1) a_2, a_3, a_4 を求めよ.

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくとき, 数列 $\{b_n\}$ は $b_{n+1}=5b_n+4$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを証明せよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. (山口大)

[解]

(1) $a_2=\dfrac{a_1}{4a_1+5}=\dfrac{1}{24}$

$a_3=\dfrac{a_2}{4a_2+5}=\dfrac{1}{124}$

$a_4=\dfrac{a_3}{4a_3+5}=\dfrac{1}{624}$ //

(2) $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+5}$

$a_n=0$ とすると $a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots=a_1=0$

となり矛盾. よって $a_n\neq 0$ $(n\in\mathbb{N})$

両辺逆数をとって

$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{5}{a_n}+4$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと $b_1=\dfrac{1}{a_1}=4$

$b_{n+1}=5b_n+4$ //

(3) $b_{n+1}+1=5(b_n+1)$ $\qquad \alpha=5\alpha+4$ $\therefore \alpha=-1$

$\{b_n+1\}$ は初項 $b_1+1=5$

公比 5 の等比数列より

$b_n+1=5\cdot 5^{n-1}$

$\therefore b_n=5^n-1$

$a_n=\dfrac{1}{b_n}$ より

$a_n=\dfrac{1}{5^n-1}$ //

〈point〉

① 分数型 1.

$a_{n+1}=\dfrac{pa_n}{ra_n+s}$ $(p, r, s\neq 0)$

$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおけばよい.

(i) $p=s$ のとき 等差型

(ii) $p\neq s$ 〃 基本型