

1.3 分数型

【例 3.1】

$a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{4a_n - 2}{a_n + 1}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ について

(1) 方程式 $x = \frac{4x - 2}{x + 1}$ の解 α, β ($\alpha < \beta$) を求めよ.

(2) (1) の α, β に対して, $b_n = \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha}$ によって定義される数列 $\{b_n\}$

が満たす漸化式を導き, 一般項 b_n を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

(広島県立大)

【解】

$$(1) x = \frac{4x - 2}{x + 1}$$

$$x(x+1) = 4x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-1)(x-2) = 0 \quad \therefore x = 1, 2$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (1, 2)$$

(2)

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{4a_n - 2}{a_n + 1} - 2}{\frac{4a_n - 2}{a_n + 1} - 1}$$

$$= \frac{\frac{4a_n - 2 - 2(a_n + 1)}{a_n + 1}}{\frac{4a_n - 2 - (a_n + 1)}{a_n + 1}}$$

$$= \frac{4a_n - 2 - 2(a_n + 1)}{4a_n - 2 - (a_n + 1)}$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n - 2}{a_n - 1}$$

$$= \frac{2}{3} b_n$$

$$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n - 1} \text{ とおくと } b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\{b_n\} \text{ は初項 } b_1 = \frac{1}{2}$$

$$公比 \frac{2}{3} \text{ の等比数列より}$$

$$b_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n - 1} \text{ より}$$

$$b_n(a_n - 1) = a_n - 2$$

$$(b_n - 1)a_n = b_n - 2$$

$$b_n \neq 1 \text{ より (2) より)}$$

$$a_n = \frac{b_n - 2}{b_n - 1}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 2}{\frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - 1}$$

$$= \frac{2^{n-1} - 2 \cdot 3^{n-1}}{2^{n-1} - 3^{n-1}}$$

<point>

① 分母が 0

$$a_{n+1} = \frac{pa_n + q}{ra_n + s} \quad (ps - qr \neq 0)$$

$$x = \frac{px + q}{rx + s} \text{ の 2 解を } \alpha, \beta \text{ とする}$$

② $\alpha \neq \beta$ とし

$$b_n = \frac{a_n - \beta}{a_n - \alpha} \text{ とおけば } \{b_n\} \text{ は等比数列}$$

③ $\alpha = \beta$ とし

$$b_n = \frac{1}{a_n - \alpha} \text{ とおけば } \{b_n\} \text{ は等差数列}$$

注

あまり深入りしなくてよい.

【例 3.2】

$a_1 = 7, a_{n+1} = \frac{7a_n + 3}{a_n + 5} (n = 1, 2, 3, \dots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$

について

(1) $b_n = a_n - k$ とおくと、 $b_{n+1} = \frac{\alpha b_n}{b_n + \beta} (n = 1, 2, 3, \dots)$ となる

ような定数 k, α, β を求めよ。ただし $k > 0$ とする。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。さらに、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(電気通信大)

【解】

$$\begin{aligned} \text{① } b_{n+1} &= a_{n+1} - k \\ &= \frac{7a_n + 3}{a_n + 5} - k \\ &= \frac{7a_n + 3 - k(a_n + 5)}{a_n + 5} \\ &= \frac{(7-k)a_n + 3 - 5k}{a_n + 5} \\ &= \frac{(7-k)(a_n - k) + k(7-k) + 3 - 5k}{a_n - k + 5} \\ &= \frac{(7-k)b_n - k^2 + 2k + 3}{b_n + k + 5} \end{aligned}$$

$-k^2 + 2k + 3 = 0$ とし、 k は $1, 3, \dots$ から

$$k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$(k+1)(k-3) = 0$$

$k > 0$ より $k = 3$

このとき $\alpha = 7 - k = 4$

$$\beta = k + 5 = 8$$

② $b_n = a_n - 3$ とおくと $b_1 = a_1 - 3 = 4$

$$b_{n+1} = \frac{4b_n}{b_n + 8}$$

$b_n = 0$ とすると $b_n = b_{n+1} = \dots = b_1 = 0$ とし

矛盾。よって $b_n \neq 0 (n \in \mathbb{N})$

両辺逆数をとって

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{b_n + 8}{4b_n} = \frac{1}{4} + \frac{2}{b_n}$$

$$c_n = \frac{1}{b_n} \text{ とおくと } c_1 = \frac{1}{b_1} = \frac{1}{4}$$

$$c_{n+1} = 2c_n + \frac{1}{4}$$

$$\alpha = 2, \beta = \frac{1}{4}$$

$$c_{n+1} + \frac{1}{4} = 2(c_n + \frac{1}{4})$$

$$\therefore d = -\frac{1}{4}$$

$\{c_n + \frac{1}{4}\}$ は初項 $c_1 + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

公比 2 の等比数列より

$$c_n + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore c_n = \frac{1}{4}(2^n - 1)$$

$$b_n = \frac{1}{c_n} \text{ より}$$

$$b_n = \frac{4}{2^n - 1}$$

$$a_n = b_n + 3 \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4}{2^n - 1} + 3 \\ &= \frac{3 \cdot 2^n + 1}{2^n - 1} \end{aligned}$$

【例 3.3】

数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 7$, $a_{n+1} = \frac{4a_n - 9}{a_n - 2}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ を満たす.

(1) すべての自然数 n に対し, $a_n > 3$ であることを示せ.

(2) 自然数 n に対し, $b_n = \frac{1}{a_n - 3}$ とおく. b_{n+1} と b_n の関係を求めよ.

(3) a_n を n で表せ.

(東京理科大)

【解】

① $n=1$ のとき

$$a_1 = 7 > 3 \text{ より成り立つ.}$$

② $n=k$ ($k \in \mathbb{N}$) のとき成り立つと仮定して

$$a_k > 3$$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$$\begin{aligned} a_{k+1} - 3 &= \frac{4a_k - 9}{a_k - 2} - 3 \\ &= \frac{4a_k - 9 - 3(a_k - 2)}{a_k - 2} \\ &= \frac{a_k - 3}{a_k - 2} > 0 \end{aligned}$$

$$\therefore a_{k+1} > 3$$

よって成り立つ.

③ ①, ② から数学的帰納法により

$$a_n > 3 \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \square$$

②

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{a_{n+1} - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{4a_n - 9}{a_n - 2} - 3} \\ &= \frac{a_n - 2}{4a_n - 9 - 3(a_n - 2)} \\ &= \frac{a_n - 2}{a_n - 3} = (a_n - 3) + 1 \\ &= 1 + \frac{1}{a_n - 3} \\ &= b_n + 1 \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \quad b_n = \frac{1}{a_n - 3} \text{ とおくと } b_1 = \frac{1}{a_1 - 3} = \frac{1}{4}$$

$$\{b_n\} \text{ は初項 } b_1 = \frac{1}{4}$$

公差 1 の等差数列より

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{4} + 1 \cdot (n-1) \\ &= n - \frac{3}{4} = \frac{4n-3}{4} \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{a_n - 3} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{b_n} + 3 \\ &= \frac{4}{4n-3} + 3 \end{aligned}$$

注

対置方程式は

$$x = \frac{4x-9}{x-2}$$

$$x(x-2) = 4x-9$$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$(x-3)^2 = 0 \quad \therefore x=3 \text{ (重解)}$$