1.4　3 項間漸化式

【例 4.1】

漸化式 $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \ (n \geqq 1)$，$a_1 = 3$，$a_2 = 5$ により定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1) 数列 $\{a_n\}$ に関する漸化式は

$$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$$

と変形できる．p，q $(p > q)$ の値を求めよ．

(2) (1) を用いて，数列 $\{a_n\}$ の第 n 項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ．　（同志社大）

[解]

(1) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$

$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$

$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$ と変形する

$a_{n+2} - (p+q)a_{n+1} + pqa_n = 0$

$\begin{cases} p+q = 3 \\ pq = 2 \end{cases}$ となればよい

p, q を 2 解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2 - (p+q)x + pq = 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ ← 特性方程式という

$(x-1)(x-2) = 0$　$\therefore x = 1, 2$

$p > q$ より $(p, q) = (2, 1)$ //

(2) ・$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$

$\{a_{n+1} - a_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 2$ 公比 2 の等比数列より

$a_{n+1} - a_n = 2^n$ …①

(p と q を入れかえて)

・$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n$

$\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = -1$ の定数列より

$a_{n+1} - 2a_n = -1$ …②

① − ② より

$a_n = 2^n + 1$ //

[別解]

① は階差型より これを解いてもよい

特性解の 1 つが 1 のときは必ず階差型を作ることができる

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

$= \sum_{k=1}^{n} (2^k + 1)$

$= \dfrac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + n$

$= 2^{n+1} + n - 2$ //

<point>

① (隣接) 3 項間漸化式 特性解が異なる 2 解

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$ …(*)

$\begin{cases} a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) & \cdots ① \\ a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \text{ と変形する} & \cdots ② \end{cases}$

このとき $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$，$\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は等比数列である

<α, β の求め方>

①，② はともに

$a_{n+2} - (\alpha+\beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$

でありこれは (*) を変形したものより

$\begin{cases} \alpha + \beta = -p \\ \alpha\beta = q \end{cases}$

α, β を 2 解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$　$a_{n+2} \to x^2$，$a_{n+1} \to x$，$a_n \to 1$

$x^2 + px + q = 0$　← としただけ

これを解けば α, β がでてくる　特性方程式という

【例 4.2】

数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) により定める.
(1) $a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) が成り立つような定数 p, q ($p < q$) の値を求めよ.
(2) 数列 $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ を $c_n = a_{n+1} - pa_n$, $d_n = a_{n+1} - qa_n$ ($n = 1, 2, 3, \cdots$) により定めたとき, 一般項 c_n, d_n を n を用いて表せ.
(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n を用いて表せ. (宮城教育大)

[解]

(1) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$

$a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n = 0$

$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ と変形する

$a_{n+2} - (p+q)a_{n+1} + pqa_n = 0$

$\begin{cases} p+q = 2 \\ pq = -1 \end{cases}$ となればよい

p, q を2解とする2次方程式の1つは

$x^2 - (p+q)x + pq = 0$

$x^2 - 2x - 1 = 0$ $\therefore x = 1 \pm \sqrt{2}$

$p < q$ より $(p, q) = (1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$ //

(2) (1) より

$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$

$c_n = a_{n+1} - pa_n$ とおくと $c_1 = a_2 - pa_1$
$= 1+\sqrt{2} = q$

$c_{n+1} = qc_n$

$\{c_n\}$ は初項 $c_1 = q$
公比 q の等比数列より

$c_n = q^n = (1+\sqrt{2})^n$

p と q を入れかえても同じなので

$a_{n+2} - qa_{n+1} = p(a_{n+1} - qa_n)$

$d_n = a_{n+1} - qa_n$ とおくと $d_1 = a_2 - qa_1$
$= 1-\sqrt{2} = p$

$d_{n+1} = pd_n$

$\{d_n\}$ は初項 $d_1 = p$
公比 p の等比数列より

$d_n = p^n = (1-\sqrt{2})^n$

(3) $c_n = a_{n+1} - pa_n$, $d_n = a_{n+1} - qa_n$ より

$a_{n+1} - pa_n = q^n \cdots ①$

$a_{n+1} - qa_n = p^n \cdots ②$

①−② より

$(q-p)a_n = q^n - p^n$

$2\sqrt{2}a_n = (1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n$

$\therefore a_n = \dfrac{\sqrt{2}}{4}\{(1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n\}$ //

【例 4.3】

$\alpha,\ \beta\ (\alpha>\beta)$ を $x^2-x-1=0$ の 2 つの相異なる実数解とするとき，$A,\ B$ を定数として

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定義された数列 $\{a_n\}$ について

(1) この漸化式が $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満足することを証明せよ．

(2) $a_1=0,\ a_2=1$ のとき，一般項 a_n を求めよ．　（京都薬科大）

[解]

(1) $a_{n+2}=A\alpha^{n+2}+B\beta^{n+2}$

$=A\alpha^n\cdot\alpha^2+B\beta^n\cdot\beta^2$

ここで α,β は $x^2-x-1=0$ の解であるから $\alpha^2=\alpha+1,\ \beta^2=\beta+1$ より

$=A\alpha^n(\alpha+1)+B\beta^n(\beta+1)$

$=(A\alpha^{n+1}+B\beta^{n+1})+(A\alpha^n+B\beta^n)$

$=a_{n+1}+a_n$ □.

(2) $a_1=0,\ a_2=1$ のとき

$A\alpha+B\beta=0$ …①

$A\alpha^2+B\beta^2=1$ …②

①, ② より

$A\alpha(\alpha-\beta)=1\quad\therefore A=\dfrac{1}{\alpha(\alpha-\beta)}$

$B\beta(\beta-\alpha)=1\quad\therefore B=\dfrac{1}{\beta(\beta-\alpha)}$

よって

$$a_n=\frac{1}{\alpha-\beta}(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1})\ //$$

注.

$x^2-x-1=0\quad\therefore x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\alpha>\beta$ より $(\alpha,\beta)=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right\}\ //$$

注.

$a_1=1,\ a_2=1$ としたものがフィボナッチ数列である.

本問は $a_1=0,\ a_2=1,\ a_3=1,\cdots$ より

フィボナッチ数列の一般項は

1大きい

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right\}$$

注.

3項間漸化式で特性方程式が異なる2解 α,β をもつとき例4.1, 4.2から分かるように

$$a_n=A\alpha^n+B\beta^n$$

と表せる. それを逆手にとった解法である.

未知数が $A,\ B$ の2つなので2つの項の値が分かれば数列は一意に決まる.

【例 4.4】

数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たすとする.

$a_1 = 1,\ a_2 = 6,\ a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ. （室蘭工業大）

［解］

(1) $a_{n+2} = 6a_{n+1} - 9a_n$

$\alpha^2 = 6\alpha - 9$

$(\alpha - 3)^2 = 0$

$\therefore \alpha = 3$（重解）

$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$

$b_n = a_{n+1} - 3a_n$ とおくと $b_1 = a_2 - 3a_1 = 3$

$b_{n+1} = 3b_n$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1 = 3$

公比 3 の等比数列より

$b_n = 3^n$ //

(2) $b_n = a_{n+1} - 3a_n$ より

$a_{n+1} - 3a_n = 3^n$

$a_{n+1} = 3a_n + 3^n$ ← $a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型

両辺 3^{n+1} で割って

$\dfrac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \dfrac{a_n}{3^n} + \dfrac{1}{3}$

$c_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくと $c_1 = \dfrac{a_1}{3} = \dfrac{1}{3}$

$c_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{3}$

$\{c_n\}$ は初項 $c_1 = \dfrac{1}{3}$

公差 $\dfrac{1}{3}$ の等差数列より

$c_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3}(n-1)$

$= \dfrac{1}{3}n$

$a_n = 3^n c_n$ より

$a_n = n \cdot 3^{n-1}$ //

<point>

① 3項間漸化式 特性解重解型

$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$

$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \alpha a_n)$

$a_{n+1} - \alpha a_n = \underbrace{(a_2 - \alpha a_1)}_{A(\text{定数})}\alpha^{n-1}$

$a_{n+1} = \alpha a_n + A\alpha^n$

$\alpha = 1$ のとき 階差型

$\alpha \neq 1$ のとき $a_{n+1} = pa_n + q^n$ 型 を解く

【例 4.5】

$a_1=1,\ a_2=2,\ a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$ で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ．　　　　（山梨大）

[解答]

$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=1$

$x^2-2x+1=0$ ← 1は無視して特性方程式を作る

$(x-1)^2=0$

$\therefore x=1$

$(a_{n+2}-a_{n+1})=(a_{n+1}-a_n)+1$ ← 1はないものとして変形し最後に1をたす

$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと $b_1=a_2-a_1=1$

$b_{n+1}=b_n+1$

$\{b_n\}$ は初項 $b_1=1$

公差1の等差数列より

$b_n=n$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より

$a_{n+1}-a_n=n$

$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}k\quad(n\geqq 1)$

$=1+\frac{1}{2}(n-1)n$

$=\frac{1}{2}n(n-1)+1$

これは $n=1$ のときも成り立つ

$a_n=\frac{1}{2}n(n-1)+1$ //

〈point〉

$a_{n+2}+pa_{n+1}+qa_n=d$ 型　dは無視して変形

$a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)+d$ と変形

$b_n=a_{n+1}-\alpha a_n$ とおくと

$b_{n+1}=\beta b_n+d$

$\beta=1$ のとき階差型

$\beta\neq 1$ のとき基本型

dが1次式，2次式，指数関数となっても，

$b_{n+1}=\beta b_n+f(n)$ 型となるだけ