1.5　連立漸化式

【例 5.1】

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があり，次の関係式

$a_1 = 1,\ b_1 = 0,\ 3a_{n+1} + a_n + 2b_n = 0,\ 3b_{n+1} + 2a_n + b_n = 0$

$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

を満たしている．このとき，a_n, b_n を求めよ．　　　　（関西大）

[解]

$$\begin{cases} 3a_{n+1} + a_n + 2b_n = 0 \\ 3b_{n+1} + 2a_n + b_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = -\frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n \cdots ① \\ b_{n+1} = -\frac{2}{3}a_n - \frac{1}{3}b_n \cdots ② \end{cases}$$

①+② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = -(a_n + b_n)$$

$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1$ 公比 -1 の等比数列より

$$a_n + b_n = (-1)^{n-1} \cdots ③$$

①−② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = \frac{1}{3}(a_n - b_n)$$

$\{a_n - b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1$ 公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列より

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdots ④$$

③+④ より

$$a_n = \frac{1}{2}\left\{(-1)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

③−④ より

$$b_n = \frac{1}{2}\left\{(-1)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\} \,//$$

<point>

① 連立漸化式 係数が対称型

$$\begin{cases} a_{n+1} = pa_n + qb_n \cdots ① \\ b_{n+1} = qa_n + pb_n \cdots ② \end{cases}$$

①+② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = (p+q)(a_n + b_n)$$

①−② より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = (p-q)(a_n - b_n)$$

となり

$\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ は等比数列

【例 5.2】

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$a_1 = 2$，$b_1 = 2$，$a_{n+1} = 6a_n + 2b_n$，$b_{n+1} = -2a_n + 2b_n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

で定められるとき，

(1) $c_n = a_n + b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ．　　　（岩手大）

[解]

(1) $\begin{cases} a_{n+1} = 6a_n + 2b_n \cdots ① \\ b_{n+1} = -2a_n + 2b_n \cdots ② \end{cases}$

①+② より

$a_{n+1} + b_{n+1} = 4(a_n + b_n)$

$\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 4$

公比 4 の等比数列より

$a_n + b_n = 4^n$　　$c_n = 4^n$ //

(2) $\therefore b_n = 4^n - a_n \cdots ③$

①，③ より

$a_{n+1} = 6a_n + 2(4^n - a_n)$

$a_{n+1} = 4a_n + 2\cdot 4^n$

両辺 4^{n+1} で割って

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{2}$$

$c_n = \dfrac{a_n}{4^n}$ とおくと $c_1 = \dfrac{a_1}{4} = \dfrac{1}{2}$

$c_{n+1} = c_n + \dfrac{1}{2}$

$\{c_n\}$ は初項 $c_1 = \dfrac{1}{2}$

公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列より

$c_n = \dfrac{1}{2}n$

$a_n = 4^n c_n$ より

$a_n = 2n\cdot 4^{n-1}$

$(b_n = 4^n - a_n = 4^n - 2n\cdot 4^{n-1} = (4-2n)\cdot 4^{n-1})$

(3) 求める和を S_n とおくと

$S_n = \sum_{k=1}^{n} 2k\cdot 4^{k-1}$

$$\begin{array}{rl} S_n = & 2(1\cdot 1 + 2\cdot 4 + \cdots\cdots + n\cdot 4^{n-1}) \\ -)\ 4S_n = & 2(\qquad 1\cdot 4 + \cdots + (n-1)\cdot 4^{n-1} + n\cdot 4^n) \\ \hline -3S_n = & 2(1 + 4 + \cdots\cdots + 4^{n-1} - n\cdot 4^n) \end{array}$$

$= 2\left(\dfrac{4^n - 1}{4 - 1} - n\cdot 4^n\right)$

$= -\dfrac{2}{9}(3n\cdot 4^n - 4^n + 1)$

$S_n = \dfrac{2}{9}\{(3n-1)\cdot 4^n + 1\}$ //

<point>

① 連立漸化式 係数非対称型

$\{a_n + b_n\}$，$\{a_n - b_n\}$ のどちらか一方が等比数列となるとき

その一般項を求めてもとの漸化式のどちらかに代入してそれを解く．

【例 5.3】

次の関係式で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある.

$a_1=b_1=1$,

$a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=4a_n+b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(1) 数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるように，定数 k の値を定めよ.

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ.　　　　（北海道教育大）

[解]

(1) $a_{n+1}+kb_{n+1}=a_n+b_n+k(4a_n+b_n)$

$=(4k+1)a_n+(k+1)b_n$

$k=-\frac{1}{4}$のとき $\{a_n+kb_n\}$は等比にならないので $k\neq-\frac{1}{4}$

$=(4k+1)\left(a_n+\frac{k+1}{4k+1}b_n\right)$

$\{a_n+kb_n\}$が等比数列となるためには

$k=\frac{k+1}{4k+1}$

$k(4k+1)=k+1$

$4k^2=1$　　∴ $k=\pm\frac{1}{2}$

(2) $k=\frac{1}{2}$のとき

$a_{n+1}+\frac{1}{2}b_{n+1}=3\left(a_n+\frac{1}{2}b_n\right)$

$\{a_n+\frac{1}{2}b_n\}$は初項 $a_1+\frac{1}{2}b_1=\frac{3}{2}$ 公比3の等比数列より

$a_n+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}\cdot 3^n$ …①

$k=-\frac{1}{2}$のとき

$a_{n+1}-\frac{1}{2}b_{n+1}=-\left(a_n-\frac{1}{2}b_n\right)$

$\{a_n-\frac{1}{2}b_n\}$は初項 $a_1-\frac{1}{2}b_1=\frac{1}{2}$ 公比−1の等比数列より

$a_n-\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}(-1)^{n+1}$ …②

①, ②より

$a_n=\frac{1}{4}\{3^n+(-1)^{n+1}\}$

$b_n=\frac{1}{2}\{3^n-(-1)^{n+1}\}$

[別解]

$$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+b_n \cdots ① \\ b_{n+1}=4a_n+b_n \cdots ② \end{cases}$$

①より $b_n=a_{n+1}-a_n$

②に代入して

$a_{n+2}-a_{n+1}=4a_n+a_{n+1}-a_n$

$a_{n+2}-2a_{n+1}-3a_n=0$

$a_1=1$, $a_2=a_1+b_1=2$

として3項間漸化式を解く.

[解]が加減法でこちらが代入法である.

注

$a_{n+1}+kb_{n+1}=r(a_n+kb_n)$ とおいて

$a_n+b_n+k(4a_n+b_n)=ra_n+rkb_n$

$(4k+1)a_n+(k+1)b_n=ra_n+rkb_n$

係数を比較して

$$\begin{cases} 4k+1=r \\ k+1=rk \end{cases}$$

としてkとrを求める

という解答がよくあるが これは誤り

何でも係数比較してはいけない.

例えば $a_n=2^n$, $b_n=2^{n+1}$ としたときに

$k\cdot 2^n+l\cdot 2^{n+1}=0$

となる. kとlは

$(k,l)=(0,0), (2,-1), (-2,1), (1,-\frac{1}{2}), \cdots$

などいくらでもある

係数比較してよいのは $(k,l)=(0,0)$ しかない ときのみ.

a_n, b_nは何になるかわからないので

安易に係数比較してはいけない.

<point>

① 連立漸化式　係数非対称型

$\{a_n+b_n\}$ も $\{a_n-b_n\}$ も等比数列でないとき

$$a_{n+1}+kb_{n+1}=r(a_n+kb_n)$$

となるように k を定めると

$\{a_n+kb_n\}$ は等比数列となる

4. $a_1=1$, $b_1=3$, $a_{n+1}=3a_n+b_n$, $b_{n+1}=2a_n+4b_n$ で定められている数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ がある．

(1) $a_{n+1}+\alpha b_{n+1}=\beta(a_n+\alpha b_n)$ を満たす α, β の組を 2 組求めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) b_n が a_n の x 倍 (x は正の整数) よりも常に大きくなるとき，x の最大値を求めよ．

(三重大)

5. 次の条件によって定められる数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ を考える．

$$x_1=1,\ y_1=5,\ x_{n+1}=x_n+y_n,\ y_{n+1}=5x_n+y_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) x_n および y_n をそれぞれ 5 で割ったときの余りを求めよ．

(2) $a_n=x_n+cy_n$ とおいたとき，数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるように定数 c の値を定め，a_n を n の式で表せ．

(3) x_n および y_n を n の式で表せ．

(早稲田大)

【例 5.4】

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$(\sqrt{2}+1)^n=a_n+\sqrt{2}b_n$ により自然数 a_n，b_n を定義する．このとき，$(\sqrt{2}-1)^n$ を a_n，b_n を用いて表せ．また，$a_n^2-2b_n^2$ の値を求めよ．

(2) 適当な自然数 k_n を用いて，$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k_n}-\sqrt{k_n-1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ と表せることを示せ．（慶応大）

[解]

(1) $a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1}=(\sqrt{2}+1)^{n+1}$

$=(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)^n$

$=(\sqrt{2}+1)(a_n+\sqrt{2}b_n)$

$=(a_n+2b_n)+\sqrt{2}(a_n+b_n)$

$a_n, b_n\in\mathbb{N}$ $(n=1,2,\cdots)$ より

$\begin{cases} a_{n+1}=a_n+2b_n \\ b_{n+1}=a_n+b_n \end{cases}$

$a_1=1,\ b_1=1$

$(\sqrt{2}+1)^2=3+2\sqrt{2},\ (\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}+1)^3=7+5\sqrt{2},\ (\sqrt{2}-1)^3=-7+5\sqrt{2}$

$(\sqrt{2}-1)^n=(-1)^n(a_n-\sqrt{2}b_n)$ と推定できる

(帰納法で示してもよいが別の方法で解く)

$a_{n+1}-\sqrt{2}b_{n+1}=(a_n+2b_n)-\sqrt{2}(a_n+b_n)$

$=(1-\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2}b_n)$

$\{a_n-\sqrt{2}b_n\}$ は初項 $a_1-\sqrt{2}b_1=1-\sqrt{2}$

公比 $1-\sqrt{2}$ の等比数列より

$a_n-\sqrt{2}b_n=(1-\sqrt{2})^n$

$a_n-\sqrt{2}b_n=(-1)^n(\sqrt{2}-1)^n$

$\therefore (\sqrt{2}-1)^n=(-1)^n(a_n-\sqrt{2}b_n)$ //

$a_n^2-2b_n^2=(a_n+\sqrt{2}b_n)(a_n-\sqrt{2}b_n)$

$=(\sqrt{2}+1)^n\cdot(\sqrt{2}-1)^n\cdot(-1)^n$

$=(-1)^n$ //

[別解]

$a_{n+1}^2-2b_{n+1}^2=(a_n+2b_n)^2-2(a_n+b_n)^2$

$=-a_n^2+2b_n^2$

$=-(a_n^2-2b_n^2)$

$\{a_n^2-2b_n^2\}$ は初項 $a_1^2-2b_1^2=-1$

公比 -1 の等比数列より

$a_n^2-2b_n^2=(-1)^n$ //

(2) $(\sqrt{2}-1)^n=(-1)^n(a_n-\sqrt{2}b_n)$

$=(-1)^n(\sqrt{a_n^2}-\sqrt{2b_n^2})$

$a_n^2-2b_n^2=(-1)^n$ であるから $2b_n^2=a_n^2-(-1)^n$ より

$=(-1)^n(\sqrt{a_n^2}-\sqrt{a_n^2-(-1)^n})$

$=\begin{cases} \sqrt{a_n^2}-\sqrt{a_n^2-1} & (n:偶数) \\ \sqrt{a_n^2+1}-\sqrt{a_n^2} & (n:奇数) \end{cases}$

$a_n\in\mathbb{N}$ より題意は示された □

【例 5.5】

自然数 n に対して，正の整数 a_n，b_n を $(3+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ によって定める．

(1) a_1，b_1 と a_2，b_2 を求めよ．

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(3) n が奇数のとき，a_n，b_n はともに奇数であって，n が偶数のとき，a_n は奇数で，b_n は偶数であることを数学的帰納法によって示せ．

（中央大）

[解]

(1) $a_n, b_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ より

$a_1=3,\ b_1=1.$

$(3+\sqrt{2})^2 = 11+6\sqrt{2}$

$a_2=11,\ b_2=6$ //

(2)
$$\begin{aligned} a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2} &= (3+\sqrt{2})^{n+1} \\ &= (3+\sqrt{2})(3+\sqrt{2})^n \\ &= (3+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2}) \\ &= (3a_n+2b_n)+(a_n+3b_n)\sqrt{2} \end{aligned}$$

$a_n, b_n \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ より

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n+2b_n \\ b_{n+1} = a_n+3b_n \end{cases}$$ //

(3) i) $n=1$ のとき

$a_1=3,\ b_1=1$ より成立.

ii) $n=2k-1$ $(k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

a_{2k-1} は奇数, b_{2k-1} は奇数

$n=2k$ のとき

$a_{2k} = \underset{\text{奇}}{3a_{2k-1}} + \underset{\text{偶}}{2b_{2k-1}}$ は奇数

$b_{2k} = \underset{\text{奇}}{a_{2k-1}} + \underset{\text{奇}}{3b_{2k-1}}$ は偶数 $\cdots(*)$

$n=2k+1$ のとき

$a_{2k+1} = \underset{\text{奇}}{3a_{2k}} + \underset{\text{偶}}{2b_{2k}}$ は奇数

$a_{2k+1} = \underset{\text{奇}}{a_{2k}} + \underset{\text{偶}}{3b_{2k}}$ は奇数 $\cdots(**)$

よって成り立つ.

i), ii) から数学的帰納法により

題意は示された //

注.

(3)