N は 3 以上の整数とする．1 から N までの整数のうちのひとつを無作為に取り出すことを 1 回の試行とする．この試行を独立に m 回繰り返し，取り出された数のうち最大のものを H，最小のものを L とする．

(1) $L=2$ となる確率を求めよ．

(2) $H=L+1$ となる確率を求めよ．

(3) $H=L+2$ となる確率を求めよ．

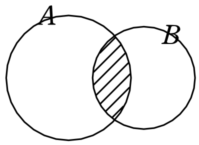
(97　一橋大)

解説

(1) A ：取り出された数がすべて 2 から N

B ：少なくとも 1 つは 2　である事象とする

求める確率は，$P(A\cap B)$



$$P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap\overline{B})$$
$$=\frac{(N-1)^m-(N-2)^m}{N^m}$$

(2) $H=L+1$ となるとき

$(L,H)=(1,2),(2,3),(3,4),\cdots,(N-1,N)$ の $N-1$ 通り

例えば，$(L,H)=(1,2)$ となる場合の数は，2^m-2 通りであり(重複順列の個数)，その他の場合も同様であるから，求める確率は

$$\frac{(N-1)(2^m-2)}{N^m}$$

(3) $H=L+2$ となるとき

$(L,H)=(1,3),(2,4),(3,5),\cdots,(N-2,N)$ の $N-2$ 通り

例えば，$(L,H)=(1,3)$ となる場合の数は，

$3^m-2\cdot(2^m-2)-3$ 通り

((すべてが $1,2,3$)$-$($(L,H)=(1,2),(2,3)$)$-$($(L,H)=(1,1),(2,2),(3,3)$))

その他の場合も同様であるから，求める確率は

$$\frac{(N-2)(3^m-2^{m+1}+1)}{N^m}$$

注 $H=L+3$ 位までならば重複順列で考えればよいが，それ以上は集合を利用して考えた方がよいと思う。