

高3数学α 数学IIIスタ演 2.複素数と図形(2)

1 [2004 日本女子大]

複素数 z が $|z-1|=|z+i|$, $2|z-i|=|z+2i|$ をともに満たすとき, z の値を求めよ.

2 [2003 芝浦工業大]

複素数 z が $|z+3-4i|=2$ を満たすとき, $|z|$ の最大値と最小値を求めよ.

3 [1999 和歌山県立医科大]

複素数平面上において, 複素数 z は原点を通らない直線上を動くものとする. このとき, z はある複素数 α に対して, $\overline{\alpha}z + \alpha\overline{z} + 1 = 0$ を満たすことを示せ.

4 [1997 図書館情報大]

- (1) 複素数平面上で $z=0$ を通り, 中心が α の円の方程式は $z\overline{z} = \alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z$ で与えられるることを示せ. ただし, \overline{z} は z に共役な複素数である.
- (2) 2 点 $z=0, 1$ を通る円の中心 α はどのような条件を満たすか. α についての式を示し, 図形的な意味を述べよ.
- (3) 3 点 $z=0, 1, \beta$ を通る円の中心 α , および, その円の方程式を求めよ. ただし, β は実数ではないとする.

5 [2000 熊本大]

0 でない複素数 z に対して, $w = z + \frac{1}{z}$ とおくとき, 次の問いに答えよ.

- (1) w が実数となるための z の満たす条件を求め, この条件を満たす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ.
- (2) w が実数で $1 \leq w \leq \frac{10}{3}$ を満たすとき, z の満たす条件を求め, この条件を満たす z 全体の図形を複素数平面上に図示せよ.

高3数学α 数学IIIスタ演 2.複素数と図形(2)

6 [1998 青山学院大]

複素数 $\alpha = a + bi$ (a, b は実数) と $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ の積は $-1 + \sqrt{3}i$ であるとする。このとき $a = \boxed{}$, $b = \boxed{}$ である。この α と複素数 z に対して $w = \alpha z$ とおく。複素数平面上で, z を表す点が $\sqrt{3} - i$ を表す点を中心とする半径 1 の円上を動くとき, w は $\boxed{} + \boxed{}i$ を表す点を中心とする半径 $\boxed{}$ の円上を動く。

7

複素数平面上で点 $P(z)$ が原点と 2 点 $A(1)$, $B(i)$ を頂点とする三角形の周上を動くとき, $w = z^2$ を満たす点 $Q(w)$ が描く図形を図示せよ。

8 [2017 東京大]

複素数平面上の原点以外の点 z に対して, $w = \frac{1}{z}$ とする。

- (1) α を 0 でない複素数とし, 点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき, 点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。
- (2) 1 の 3 乗根のうち, 虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め, 複素数平面上に図示せよ。

9 [2016 北海道大]

複素数平面上の 2 点 $P(z)$, $Q(w)$ が次の 2 つの条件を満たすとする。ただし, $O(0)$ は原点である。

- ・線分 OP の長さと線分 OQ の長さの積が 1 に等しい。
- ・ O を端とする半直線 OP 上に Q がある。

- (1) z を w を用いて表せ。
- (2) 点 $A(1-i)$ を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円から O を除いた曲線の上を P が動くとき, Q の軌跡を図示せよ。ただし, i は虚数単位である。
- (3) $r > 0$ とし, β を絶対値 $|\beta|$ が r に等しくない複素数とする。 P が点 $B(\beta)$ を中心とする半径 r の円上を 1 周するとき, Q の軌跡を求めよ。

高3数学α 数学IIIスタ演 2.複素数と図形(2)

10 [2000 名古屋市立大]

2つの複素数 z と w との間に, $w = \frac{z+i}{z+1}$ なる関係がある. ただし, $z+1 \neq 0$, i は虚数単位とする.

- (1) z が複素数平面上の虚軸を動くとき, w の軌跡を求め, 図示せよ.
- (2) z が複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, w の軌跡を求め, 図示せよ.

11 [2001 姫路工業大]

複素数 w に対して, $z = w + \frac{2}{w}$ とおく. 次の問いに答えよ.

- (1) $w = \cos \theta + i \sin \theta$ のとき, z の実部 x と虚部 y を求めよ.
- (2) $w = \cos \theta + i \sin \theta$ で θ が $0 \leq \theta \leq 2\pi$ の範囲を動くとき, z の描く複素数平面上の曲線で囲まれた部分の面積を求めよ.