数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

(規則)　さいころを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\fallingdotseq 0$，$X(2)\fallingdotseq 0$，……，$X(5)\fallingdotseq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\fallingdotseq 0$，$X(2)\fallingdotseq 0$，……，$X(9)\fallingdotseq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。

(10　千葉大)

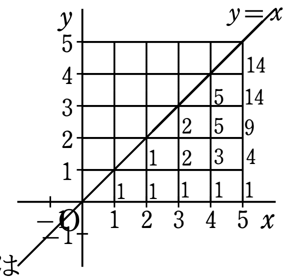
(解説)

(1) 奇数，偶数がともに 5 回ずつ出ればよいから

$$ {}_{10}C_5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256} $$

(2) 先ほどの問題とほぼ同じ問題である

$$ 4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{16} $$



(3) x を奇数の目が出る回数， y を偶数の目が出る回数として，硬貨を 10 回投げたとき，点 A が初めて原点に戻るのは $y=x$ となるとき，原点に戻ることに注意して，O をスタートして， $y=x$ に触れずに $(5,5)$ に来る最短経路を考えればよいから，図より $14\times2=28$ 通り

1 つ 1 つの経路をたどる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ であるから，求める確率は

$$ 28\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{7}{256} $$

参考

この程度であれば，図のように経路数を地道に計算して求めればよいが，回数が多くなったり， n 回となったときは，カタラン数を求めたようにして求めればよい。