1.8　記数法(2)

(1) 雑題

a^m 進数から a^n 進数 (a, m, n は自然数，　$a \geqq 2, m \neq n$)への書き換えは比較的容易にできます。

例1
(1) 2 進法で $11011_{(2)}$ と表される数を 4 進法で表すと $\boxed{\text{コサシ}}_{(4)}$ である。
(2) 2 進数 10100 を 8 進数で表せ.

解説

(1) $11011_{(2)} = 1\cdot2^4 + 1\cdot2^3 + 0\cdot2^2 + 1\cdot2^1 + 1\cdot2^0$

$\qquad = 1\cdot2^4 + (2+0)\cdot2^2 + (2+1)\cdot2^0$

$\qquad = 1\cdot4^2 + 2\cdot4^1 + 3\cdot4^0 = {}^{\text{コサシ}}123_{(4)}$

別解

$100_{(2)} = 10_{(4)}$ であるから，

$11011_{(2)}$ を下の桁から 2 桁ごとに区切り，　$1 \mid 10 \mid 11$

$1_{(2)} = 1_{(4)}, 10_{(2)} = 2_{(4)}, 11_{(2)} = 3_{(4)}$ より，

$\quad 11011_{(2)} = 123_{(4)}$

注 これは，2 桁ごとに見て，

$\quad 1 \mid 10 \mid 11 = 1\cdot2^4 + 2\cdot2^2 + 3\cdot2^0 = 1\cdot4^2 + 2\cdot4^2 + 3\cdot4^0 = 123_{(4)}$

(2) $10100_{(2)} = 1\cdot2^4 + 0\cdot2^3 + 1\cdot2^2 + 0\cdot2 + 0$

$\qquad = (2+0)\cdot2^3 + (4+0+0)\cdot2^0$

$\qquad = 2\cdot8^1 + 4\cdot8^0 = 14_{(8)}$

別解

$1000_{(2)} = 10_{(8)}$ であるから，

$10100_{(2)}$ を下の桁から 3 桁ごとに区切り，　$10 \mid 100$

$10_{(2)} = 2_{(8)}, 100_{(2)} = 4_{(8)}$ より，

$\quad 10100_{(2)} = 24_{(8)}$

例2

(1)　10 進法で表された整数 147 を，5 進法と 8 進法で表せ。

(2)　5 進法により 2 桁で表された正の整数で，8 進法で表すと 2 桁となるものを考える。このとき，8 進法で表したときの各位の数の並びは 5 進法で表されたときの各位の数の並びと逆順にはならないことを示せ。

(3)　5 進法により 3 桁で表された正の整数で，8 進法で表すと 3 桁となるものを考える。このとき，8 進法で表したときの各位の数の並びが 5 進法で表されたときの各位の数の並びと逆順になるものをすべて求め，10 進法で表せ。

解説

(1) [1]の計算より，余りを逆順に並べて，

$147=1042_{(5)}$

[2]の計算より，余りを逆順に並べて

$147=223_{(8)}$

[1]

$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 5 & 147 & \text{余り} \\ 5 & 29 & \cdots 2 \\ 5 & 5 & \cdots 4 \\ 5 & 1 & \cdots 0 \\ & 0 & \cdots 1 \end{array}$$

[2]

$$\begin{array}{r@{\,)\,}rl} 8 & 147 & \text{余り} \\ 8 & 18 & \cdots 3 \\ 8 & 2 & \cdots 2 \\ & 0 & \cdots 2 \end{array}$$

(2) 5 進法で $ab_{(5)}$ と表された数を 8 進法で表すと $ba_{(8)}$ となるとする

ただし，a, b は整数で，$1\leqq a\leqq 4, 1\leqq b\leqq 4$ である

$ab_{(5)}, ba_{(8)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと $5a+b, 8b+a$ より

$5a+b=8b+a \quad \therefore 4a=7b$

b は整数であるから，$4a$ は 7 の倍数であり，

4 と 7 は互いに素であるから，a は 7 の倍数である

$1\leqq a\leqq 4$ であるから，これを満たす a は存在しない

よって，題意は示された

(3) 5 進法で $abc_{(5)}$ と表された数を 8 進法で表すと $cba_{(8)}$ となるとする

ただし，a, b, c は整数で，$1\leqq a\leqq 4, 0\leqq b\leqq 4, 1\leqq c\leqq 4$ である

$abc_{(5)}, cba_{(8)}$ をそれぞれ 10 進法で表すと $25a+5b+c, 64c+8b+a$ より

$25a+5b+c=64c+8b+a \quad \therefore 21c=8a-b$

$1\leqq a\leqq 4, 0\leqq b\leqq 4, 1\leqq c\leqq 4$ より，

$(a, b, c)=(3, 3, 1)$

求める 5 進法の数は，$331_{(5)}$

これを 10 進法で表すと，

$3\cdot 5^2+3\cdot 5^1+1\cdot 5^0=91$

例3
a，b，c をそれぞれ $1 \leqq a < 5$，$0 \leqq b < 5$，$1 \leqq c < 5$ を満たす整数とする。5 進法で $abc_{(5)}$ と表される自然数を 2 倍した数は，5 進法で $cba_{(5)}$ と表されるという。このような a，b，c の組は (a, b, c)
$=(^{ア}\boxed{}, {}^{イ}\boxed{}, {}^{ウ}\boxed{})$ である。

(解説)
条件より

$$(a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c) \times 2 = c \cdot 5^2 + b \cdot 5 + a$$

$$\therefore 49a = 23c - 5b$$

$1 \leqq a < 5$，$0 \leqq b < 5$，$1 \leqq c < 5$ より

$$(a, b, c) = ({}^{ア}1, {}^{イ}4, {}^{ウ}3)$$

(2) n 進法の四則計算

2 進法の足し算では，

$$0_{(2)} + 0_{(2)} = 0_{(2)}, 0_{(2)} + 1_{(2)} = 1_{(2)}, 1_{(2)} + 0_{(2)} = 1_{(2)}, 1_{(2)} + 1_{(2)} = 10_{(2)}$$

が基本となります。
これを，

+	0	1
0	0	1
1	1	10

と表で表すこともあります。この表を**演算表**といいます。
2 進法の引き算と掛け算の演算表は，以下のようになります。

−	0	1
0	0	1
1	−1	0

×	0	1
0	0	0
1	0	1

2 進法の割り算は，10 進法の割り算と同様に，掛け算と引き算を組み合わせて行います。

例4
(1)　2 進数の $1011_{(2)}$ は，10 進数ではいくつになるか。
(2)　2 進数の $1011_{(2)}$ に 2 進数の $10_{(2)}$ を足すと，2 進数ではいくつになるか。
(3)　2 進数の $1011_{(2)}$ に 2 進数の $10_{(2)}$ をかけると，2 進数ではいくつになるか。

解説

(1) $1011_{(2)}=1\cdot2^3+0\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0$

$=8+2+1=11$

(2) $1011_{(2)}+10_{(2)}=1101_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ +\quad 10 \\ \hline 1101 \end{array}$$

別解

$1011_{(2)}+10_{(2)}=11+2$

$=13$

$=1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0=1101_{(2)}$

(3) $1011_{(2)}\times10_{(2)}=10110_{(2)}$

$$\begin{array}{r} 1011 \\ \times\quad 10 \\ \hline 0 \\ 1011 \\ \hline 10110 \end{array}$$

別解

$1011_{(2)}\times10_{(2)}=11\times2$

$=22$

$=1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+0\cdot2^0=10110_{(2)}$

例5

(1) $1234_{(5)}$ と $2341_{(5)}$ を 10 進法で表すと，それぞれ $^{ア}\boxed{}$ と $^{イ}\boxed{}$ である。$1234_{(5)}+2341_{(5)}$ を 5 進法で表すと $^{ウ}\boxed{}$ である。

(2) 5 進法で表された 2 つの数 $123_{(5)}$ と $24_{(5)}$ の積を 5 進法で表せ。

解説

(1) $1234_{(5)}=1\cdot5^3+2\cdot5^2+3\cdot5^1+4\cdot5^0$

$=125+50+15+4={}^{ア}194$

$2341_{(5)}=2\cdot5^3+3\cdot5^2+4\cdot5^1+1\cdot5^0$

$=250+75+20+1={}^{イ}346$

$1234_{(5)}+2341_{(5)}={}^{ウ}4130_{(5)}$

$$\begin{array}{r} 1234 \\ +\ 2341 \\ \hline 4130 \end{array}$$

別解

$1234_{(5)}+2341_{(5)}=194+346$

$=540$

$=4\cdot5^3+1\cdot5^2+3\cdot5^1={}^{ウ}4130_{(5)}$

(2) 5 進法の掛け算の演算表は次のようになる

$\times$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

$$\begin{array}{r} 123 \\ \times \quad 24 \\ \hline 1102 \\ 301 \\ \hline 4112 \end{array}$$

$123_{(5)} \times 24_{(5)} = 4112_{(5)}$

$\boxed{\text{別解}}$

$123_{(5)} = 1 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 3 \cdot 5^0 = 38$

$24_{(5)} = 2 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^0 = 14$

$123_{(5)} \times 24_{(5)} = 38 \times 14 = 532$

これを 5 進法で表すと，$4112_{(5)}$