高3数学β　2017スタンダード演習　12.数の理論1

$\boxed{1}$ [2000 関西学院大]

整数 700 の約数の中で，正の数でかつ偶数であるものの個数と，それらの総和を求めよ．

$\boxed{2}$ [1999 近畿大]

自然数 n の約数とは，n を割り切る自然数を表し，1 と n も含める．このとき

(1)　1000 の約数は $^{ア}\boxed{}$ 個あり，それらの約数の和は $^{イ}\boxed{}$ である．

(2)　3600 の約数は $^{ウ}\boxed{}$ 個あり，それらの約数の和は $^{エ}\boxed{}$ である．

(3)　3600 の約数のうちで 1000 の約数でないものは，$^{オ}\boxed{}$ 個あり，それらの和は $^{カ}\boxed{}$ である．

$\boxed{3}$ [2003 慶応義塾大]

(1)　正の整数 n の正の約数の個数を $d(n)$ で表す．例えば，$d(5)=2$，$d(6)=4$ であり，$d(32)=^{ア}\boxed{}$，$d(72)=^{イ}\boxed{}$ である．

一般に，n が素数 p の累乗として $n=p^k$ (k は正の整数) と表されるとき，$d(n)=^{ウ}\boxed{}$ である．上で求めた $d(32)$ はこの例である．

次に，n が 2 個の異なる素数 p_1，p_2 と正の整数 k_1，k_2 を用いて $n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}$ と表されるとき，$d(n)=^{エ}\boxed{}$ である．上で求めた $d(72)$ はこの例である．

更に，n が r 個の異なる素数 p_1，p_2，……，p_r と正の整数 k_1，k_2，……，k_r により $n={p_1}^{k_1}{p_2}^{k_2}\cdots\cdots{p_r}^{k_r}$ と素因数分解されるとき，$d(n)$ を k_1，k_2，……，k_r を用いて表すと $d(n)=^{オ}\boxed{}$ となる．

(2)　$d(n)$ が奇数であることは，n がある整数 m を用いて $n=m^2$ と表されることと同値であることを証明せよ．

$\boxed{4}$ [2008 早稲田大]

正の約数の個数が 28 個である最小の正の整数を求めよ。

$\boxed{5}$ [2015 明治大]

自然数 a の正の約数の中で a 以外のものの和が a に等しいとき，a を完全数という。

(1)　28 の正の約数の中で 28 以外のものをすべて書きあげると $\boxed{}$ であるから，28 は完全数である。

(2)　自然数 n と素数 p に対して，$2^{n-1}p$ のすべての正の約数の和を n と p で表せ。ただし $p \neq 2$ とする。

(3)　n は 2^n-1 が素数であるような自然数とする。このとき，$2^{n-1}(2^n-1)$ が完全数であることを示せ。

(4)　a が偶数で完全数ならば，ある自然数 n に対して $a=2^{n-1}(2^n-1)$ と表されることを示せ。

$\boxed{6}$ [2005 早稲田大]

自然数 n に対して，n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 であるような自然数の個数を $f(n)$ とする。

例えば，$n=12$ に対しては，このような自然数は，1，5，7，11 の 4 個なので，

$f(12)=4$ である。また，$f(1)=1$，素数 p に対しては $f(p)=p-1$ である。

(1)　$f(77)$ の値を求めよ。

(2)　$f(pq)=24$ となる 2 つの素数 p，q (ただし，$p<q$ とする) の組を求めよ。

(3)　k，n を自然数とするとき，$f(2^k3^n)$ の値を k と n の式で表せ。

$\boxed{7}$ [2004 上智大]

100! を素数の積に分解すると $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^{16} \cdot 11^9 \cdot 13^7 \cdots\cdots$ となる．ただし，$a=$ ア $\boxed{}$，

$b=$ イ $\boxed{}$，$c=$ ウ $\boxed{}$ である．

$\boxed{8}$ [2013 慶応義塾大]

50! を計算すると，末尾には 0 が連続してちょうど $\boxed{}$ 個並ぶ。

$\boxed{9}$ [2016 学習院大]

すべての自然数 n に対して $\dfrac{n^3}{6}-\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{4n}{3}$ は整数であることを証明せよ。

$\boxed{10}$ [2006 関西大]

すべての自然数 n について，$3^{3n}-2^n$ は 25 の倍数であることを示せ。

$\boxed{11}$ [2004 宮崎大]

n を 2 以上の自然数とするとき，n^4+4 は素数にならないことを示せ.

$\boxed{12}$ [2016 名城大]

$\dfrac{1406}{4477}$ を約分するために，分母と分子の最大公約数を求めると，$^{ア}\boxed{}$ となる。$\dfrac{1406}{4477}$ を既約分数で表すと，$^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{13}$ [2015 九州大]

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3)　p，q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす p，q の組をすべて求めよ。