

A, B 2 チームが対戦するとき, それぞれの勝つ確率は $\frac{1}{2}$ ずつであるとする. この 2 チームが 7 試合を行い, 先に 4 勝した方が優勝とするとき, 何試合目で優勝が決まる確率が最も高いか. また, そのときの確率を求めよ.

(99 名古屋学院大)

(解説)

優勝が決まるのは, 4 試合目から 7 試合目の間である

4 試合目で優勝が決まるのは, A, B どちらが優勝してもよいことに注意して

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4 \times 2 = \frac{1}{8}$$

5 試合目で優勝が決まるのは,

どちらかが, 1 試合目から 4 試合目で 3 勝 1 敗で,

(1 試合目から 4 試合目で, 例えば A が 3 勝 1 敗となる場合は, 4 試合から A が勝つ 3 試合を選ぶ選び方である ${}_4C_3$ 通りだけある)

5 試合目で 3 勝している方が勝てばよいから

$${}_4C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{4}$$

6 試合目で優勝が決まるのは,

どちらかが, 1 試合目から 5 試合目で 3 勝 2 敗で,

6 試合目で 3 勝している方が勝てばよいから

$${}_5C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} \times 2 = \frac{5}{16}$$

7 試合目で優勝が決まるのは,

1 試合目から 6 試合目で 3 勝 3 敗で,

7 試合目はどちらが勝ってもよいから

$${}_6C_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

よって, 6 試合目か 7 試合目で優勝が決まる確率が最も高く,

そのときの確率は $\frac{5}{16}$