高3数学β　2017スタンダード演習　41.平面ベクトル(2)

$\boxed{1}$［2013 横浜国立大］

鋭角三角形 ABC は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。更に，O から辺 BC, CA，AB に下ろした垂線をそれぞれ OP，OQ，OR とするとき，

$3\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+5\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を求めよ。

(3)　OQ の長さを求めよ。

$\boxed{2}$［2008 慶応義塾大］

△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=2$，$|\vec{a}-2\vec{b}|=\sqrt{7}$ のとき

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値は $\boxed{}$ である。　　(2)　△OAB の面積は $\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$［2012 鹿児島大］

平面上に互いに異なる 3 点 O，A，B があり，それらは同一直線上にはないものとする。OA$=2$，OB$=3$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とし，その内積を $\vec{a}\cdot\vec{b}=t$ とおく。∠AOB の二等分線と線分 AB との交点を C とし，直線 OA に関して点 B と対称な点を D とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となるとき，∠AOB と OC を求めよ。

$\boxed{4}$［1998 千葉大］

平面上の三角形 OAB は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a},\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$|\vec{a}|=1,|\vec{b}|=\sqrt{2},\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ を満たすとする．辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし，直線 OP に関して A と対称な点を Q，OQ の延長と AB の交点を R とおく．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ．

(3)　△PQR の面積を求めよ．

$\boxed{5}$［2014 早稲田大］

角 A が鈍角の三角形ABCにおいて AB＝2，AC＝3 であり，三角形ABCの面積は $2\sqrt{2}$ である。このとき，三角形ABCの垂心をHとすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\frac{\overset{ア}{\boxed{}}\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overset{イ}{\boxed{}}\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\overset{ウ}{\boxed{}}}$$ である。

$\boxed{6}$［2012 東京慈恵会医科大］

三角形ABCにおいて，$\mathrm{AB}=\sqrt{2}$，BC＝2，$\mathrm{CA}=\sqrt{3}$ とし，外心をOとする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たす実数 s，t の値を求めよ。

$\boxed{7}$［1999 山梨大］

△ABCの重心をG，外接円の中心をEとする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}=\vec{0}$ を示せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{EA}}+\overrightarrow{\mathrm{EB}}+\overrightarrow{\mathrm{EC}}=\overrightarrow{\mathrm{EH}}$ となるように点Hをとると，点Hは△ABCの垂心であることを示せ．

(3)　E，G，Hは一直線上にあり，EG : GH＝1 : 2であることを示せ．

$\boxed{8}$［2007 東北学院大］

平面上に定点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ があり，$|\vec{a}-\vec{b}|=5$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=6$ を満たしているとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関するベクトル方程式 $|\vec{p}-\vec{a}+\vec{b}|=|2\vec{a}+\vec{b}|$ で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3)　点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ に関するベクトル方程式 $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(2\vec{p}-\vec{b})=0$ で表される円の中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

$\boxed{9}$［2007 埼玉大］

△ABCを1辺の長さが1の正三角形とする。△ABCを含む平面上の点Pが $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$ を満たして動くとき，Pが描く図形を求めよ。

$\boxed{10}$［1997 山梨大］

座標平面上に3点 O$(0, 0)$, A$(2, 3)$, B$(6, 1)$ がある．点 P の位置が実数 s, t を用いて
$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表されている．次のそれぞれの場合について，点 P の位置または存在範囲を図示し，その理由を説明せよ．

(1)　$s = \dfrac{1}{2}, t = \dfrac{1}{2}$

(2)　$s + t = 1, s \geqq 0, t \geqq 0$

(3)　$2s + 3t \leqq 1, s \geqq 0, t \geqq 0$

(4)　$s + t = 2, st < 0$

$\boxed{11}$［2003 大阪歯科大］

O を原点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (2,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (1,\ 2)$ とする．$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする．実数 s，t が次の条件を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在範囲を図示せよ．

(1)　$0 \leqq s \leqq 2$，$t = 0$

(2)　$0 \leqq s \leqq 2$，$1 \leqq t \leqq 2$

(3)　$s \geqq 0$，$t \geqq 0$，$s + 2t \leqq 2$

$\boxed{12}$［2013 東京慈恵会医科大］

平面上に3点 O，A，B があり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = |2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 1$ を満たしている。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = {}^{ア}\boxed{}$ である。また，実数 s，t が条件 $1 \leqq s + 3t \leqq 3$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ を満たしながら動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定められた点 P の存在する範囲の面積は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{13}$［2012 上智大］

$\triangle$OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$s \geqq 0$，$t \geqq 0$ とする。
また，$\triangle$OAB の面積を S とする。

(1)　$1 \leqq s + t \leqq 3$ のとき，点 P の存在しうる領域の面積は S の何倍か答えよ。

(2)　$1 \leqq s + 2t \leqq 3$ のとき，点 P の存在しうる領域の面積は S の何倍か答えよ。