1.6　不定方程式(3)

(1) 解の絞り込み

　不等式を利用して，値の範囲を絞り込んで，整数解を求める問題について考えます。

例1

(1)　$x^2+y^2=41$ を満たす正の整数 x, y の組をすべて求めよ。

(2)　$x^2+4y^2=17$ を満たす正の整数をすべて求めると　$(x,\ y)=\boxed{}$

である.

(解説)

(1) $x^2+y^2=41$

$y^2>0$ より，　$x^2<41$

このとき，　$x=1, 2, 3, 4, 5, 6$ (解の絞り込み)

求める x, y の組は，

　$(x,\ y)=(4,\ 5), (5,\ 4)$

(2) $x^2+4y^2=17$

$x^2>0$ より，　$4y^2<17$　　$\therefore\ y^2<\dfrac{17}{4}$

このとき，　$y=1, 2$

求める $(x,\ y)$ は，

　$(x,\ y)=(1,\ 2)$

　$ax^2+bxy+cy^2+f=0$ において，　$ax^2+bxy+cy^2$ が因数分解できないときは，　x または y についての 2 次方程式とみて，解の公式を利用して解を絞り込みます。

例2

2 つの自然数 p，q が $p^2+pq+q^2=19$ を満たすとき，$p+q=\boxed{}$ である。

(解説)

$p^2+pq+q^2=19$

p についての 2 次方程式とみて

$p^2+qp+q^2-19=0$
解の公式より,

$$p=\frac{-q\pm\sqrt{q^2-4(q^2-19)}}{2}=\frac{-q\pm\sqrt{76-3q^2}}{2}$$

p は自然数より, $76-3q^2=n^2$ (n は整数)であることが必要
このとき, $n^2\geqq 1$ であるから, $3q^2\leqq 75$ $\therefore$ $q^2\leqq 25$ より, $q=2, 3, 5$
求める自然数の組は,

$(p, q)=(3, 2), (2, 3)$

よって, $p+q=5$

$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ において, $ax^2+bxy+cy^2$ が因数分解できないときも同様です。

例3 x, y がともに整数で, $x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$ を満たすとき, (x, y) を求めよ。

解説

$x^2-2xy+3y^2-2x-8y+13=0$
x についての方程式とみて,
$x^2-2(y+1)x+3y^2-8y+13=0$
解の公式より,

$$\begin{aligned}x&=(y+1)\pm\sqrt{(y+1)^2-(3y^2-8y+13)}\\&=(y+1)\pm\sqrt{-2y^2+10y-12}\\&=(y+1)\pm\sqrt{-2(y-2)(y-3)}\end{aligned}$$

x は整数より, x は実数であるから,

$-2(y-2)(y-3)\geqq 0$ $\therefore$ $2\leqq y\leqq 3$

このとき, $y=2, 3$
$y=2$ のとき, $x=3$
$y=3$ のとき, $x=4$
よって,

$(x, y)=(3, 2), (4, 3)$

例4

(1) $\sqrt{n^2-8n+1}$ が整数となる整数 n の個数は ${}^{ア}\boxed{}$ 個あり，最も大きい n の値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2) $\sqrt{n^2+11n-8}$ が整数となるような正の整数 n をすべて求めよ。

解説

(1) $\sqrt{n^2-8n+1}=m$ (m は 0 以上の整数) とおくと

$n^2-8n+1=m^2$

$(n-4)^2-m^2=15$

$(n-4+m)(n-4-m)=15$

n, m は整数であるから，$n-4+m$，$n-4-m$ は整数である

$m \geqq 0$ であるから，$n-4+m \geqq n-4-m$ より

$n-4+m$	15	5	-3	-1
$n-4-m$	1	3	-5	-15

よって，$(n, m)=(12, 7), (8, 1), (0, 1), (-4, 7)$

したがって，m が整数となる n の個数は ${}^{ア}4$ 個あり，

最も大きい n の値は ${}^{イ}12$ である

(2) $\sqrt{n^2+11n-8}=m$ (m は 0 以上の整数)とおくと，

$n^2+11n-8=m^2$

n の 2 次方程式とみて，

$n^2+11n-(m^2+8)=0$

解の公式より，

$$n=\frac{-11\pm\sqrt{121+4(m^2+8)}}{2}=\frac{-11+\sqrt{4m^2+153}}{2}$$

n は整数より，$4m^2+153=k^2$ (k は 0 以上の整数)であることが必要

$k^2-4m^2=153$

$(k+2m)(k-2m)=153$

k, m は整数であるから，$k+2m, k-2m$ は整数である

$k, m>0$ であるから，$k+2m>0$, $k+2m>k-2m$ より

$k+2m$	153	51	17
$k-2m$	1	3	9

よって，$(k, m)=(77, 38), (27, 12), (13, 2)$

したがって，$n=33, 8, 1$

別解

$\sqrt{n^2+11n-8}=m$ (m は 0 以上の整数)とおくと，

$$n^2+11n-8=m^2$$

$$\left(n+\frac{11}{2}\right)^2-m^2=\frac{153}{4}$$

両辺に 4 を掛けて

$$4\left(n+\frac{11}{2}\right)^2-4m^2=153$$

$$(2n+11)^2-(2m)^2=153$$

$$(2n+2m+11)(2n-2m+11)=3^2\cdot 17$$

n, m は整数であるから， $2n+2m+11, 2m-2m+11$ は整数である

$n\geqq 1$， $m\geqq 0$ より， $2n+2k+11>0$, $2n+2k+11\geqq 2n-2k+11$ より

$(2n+2k+11,\ 2n-2k+11)=(17,\ 9),\ (51,\ 3),\ (153,\ 1)$

$\therefore (n,\ k)=(1,\ 2),\ (8,\ 12),\ (33,\ 38)$

$\therefore n=1,\ 8,\ 33$

注 整数問題において，分数を登場させることは，なるべく避けるべきです。別解の方法は本質的には分数を登場させてはいませんが，解の公式を利用して解いた方がよい。ルート内の 1 次の項 (本問では $11n$) の係数が奇数か偶数かで，解き方が異なります。

(2) 余りに着目

ある数で割った余りに着目して，整数解を求める問題を考えます。

例5

x と y は正の整数で， $2x^2=y^2+1$ を満たすとする.

(1) y は奇数であることを示せ.

(2) $y=2n+1$ としたとき， n が 4 の倍数であるかまたは $n+1$ が 4 の倍数であることを示せ.

(3) $1\leqq x\leqq 50, 1\leqq y\leqq 50$ の範囲にある整数 x, y の組で $2x^2=y^2+1$ を満たすものをすべて求めよ.

解説

(1) $2x^2=y^2+1$ より， $y^2=2x^2-1$

よって， y^2 は奇数である

すべての整数 m は奇数か偶数のどちらかで，

m が奇数であれば m^2 は奇数， m が偶数であれば m^2 は偶数より，

y は奇数である

(2) $y=2n+1$ ($n\geqq 0$)としたとき，

$$2x^2=(2n+1)^2+1$$

$$2x^2=4n^2+4n+2$$

$$\therefore\ x^2=2n(n+1)+1$$

x も奇数であるから， $x=2k+1$ (k は整数， $k\geqq 0$)とおくと，

$$(2k+1)^2=2n(n+1)+1$$

$$4k(k+1)+1=2n(n+1)+1$$

$$\therefore\ n(n+1)=2k(k+1)$$

$k(k+1)$ は連続 2 整数の積であるから，2 の倍数である

よって， $n(n+1)$ は 4 の倍数である

$n, n+1$ のどちらかは奇数であるから，

n が 4 の倍数であるかまたは $n+1$ が 4 の倍数である

別解

$y=2n+1$ ($n\geqq 0$)としたとき，

$$x^2=2n(n+1)+1$$

すべての整数 n は $n=4l, 4l+1, 4l+2, 4l-1$ (l は整数)のいずれかの形で表すことができる

$n=4l$ ($l\geqq 1$)のとき， $2n(n+1)+1=8l(4l+1)+1$

$n=4l+1$ ($l\geqq 0$)のとき， $2n(n+1)+1=8(4l^2+3l)+5$

$n=4l+2$ ($l\geqq 0$)のとき， $2n(n+1)+1=8(4l^2+5l+1)+5$

$n=4l-1$ ($l\geqq 1$)のとき， $2n(n+1)+1=8(4l-1)l+1$

一方，すべての整数 x は $x=8s, 8s\pm 1, 8s\pm 2, 8s\pm 3, 8s+4$ (s は整数)の形で表すことができて， x^2 を 8 で割った余りは，0, 1, 4 のいずれかであるから，

$$n=4k, 4k-1$$

よって，題意は示された

(3) $n=4l$ (l は整数, $l\geqq 0$)のとき， $y=8l+1$ ($l=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$2x^2=(8l+1)^2+1 \qquad \therefore\ x^2=32l^2+8l+1=8l(4l+1)+1$$

よって，求める x, y の組は， $(x, y)=(1, 1), (29, 41)$

$n=4l-1$ (l は整数, $l\geqq 1$)のとき， $y=8l-1$ ($l=1, 2, 3, 4, 5, 6$)

$$2x^2=(8l-1)^2+1 \qquad \therefore\ x^2=32l^2-8l+1=8l(4l-1)+1$$

よって，求める x, y の組は，$(x, y)=(5, 7)$
以上より，$(x, y)=(1, 1), (5, 7), (29, 41)$

整数問題を考えるとき，
(1) 因数分解で積の形を作る
(2) 不等式で絞り込む
(3) 余りに着目する
の 3 つが大きな原則となります。

(3) 3 元不定方程式

文字が 3 種類以上になったときは，不等式による絞り込みが主な手法になります。

例6
(1)　a，b，c が整数で，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ かつ $abc=a+b+c$ のとき，$ab\leqq 3$ であることを示せ.
(2)　$1\leqq a\leqq b\leqq c$ かつ $abc=a+b+c$ を満たす整数 a，b，c をすべて求めよ.

(解説)
(1) $1\leqq a\leqq b\leqq c$ より
　$abc=a+b+c\leqq c+c+c=3c$
両辺 $c\,(>0)$ で割ると，$ab\leqq 3$
(2) (1)から，$ab\leqq 3$，$1\leqq a\leqq b$ より
　$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)$
$(a, b)=(1, 1)$ のとき，$c=2+c$　これを満たす c は存在しない
$(a, b)=(1, 2)$ のとき，$2c=3+c$　$\therefore c=3$
$(a, b)=(1, 3)$ のとき，$3c=4+c$　$\therefore c=2$ (不適)
以上より，
　$(a, b, c)=(1, 2, 3)$

例7
正の整数 x, y, z が $x\leqq y\leqq z$ と $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1$ を満たしている.
(1)　$x\leqq 3$ であることを示せ.
(2)　x, y, z の組をすべて求めよ.

解説

(1) $0<x\leqq y\leqq z$ であるから，$\dfrac{1}{x}\geqq\dfrac{1}{y}\geqq\dfrac{1}{z}$ より

$$1=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{x}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{3}{x}\quad\therefore\ x\leqq3$$

(2) $x\leqq3$ より，$x=1, 2, 3$

$x=1$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$　これを満たす y, z は存在しない

$x=2$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leqq\frac{1}{y}+\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\quad\therefore\ y\leqq4$$

$2=x\leqq y\leqq4$ より，$(y, z)=(3, 6), (4, 4)$

$x=3$ のとき，(1)の不等式の等号成立条件より，$x=y=z=3$

以上より，

$(x, y, z)=(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

別解

$x=1$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=0$　これを満たす y, z は存在しない

$x=2$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{2}$

$2(y+z)=yz$

$(y-2)(z-2)=4$

$x=2\leqq y$ であるから，$0\leqq y-2\leqq z-2$ より

$(y-2, z-2)=(1, 4), (2, 2)$

$\therefore (x, y, z)=(2, 3, 6), (2, 4, 4)$

$x=3$ のとき，$\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{2}{3}$

$3(y+z)=2yz$

$(2y-3)(2z-3)=9$

$x=3\leqq y$ であるから，$3\leqq 2y-3\leqq 2z-3$ より

$(2y-3, 2z-3)=(3, 3)$

$\therefore (x, y, z)=(3, 3, 3)$

以上より，

$(x, y, z)=(2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3)$

確認問題1

実数 x，y が等式 $3x^2-2xy+2y^2-2x+y-1=0$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=0$ のとき，x の値を求めよ。

(2)　y のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　この等式を満たす x，y で，ともに整数となるものをすべて求めよ。

解説

(1) $y=0$ のとき，

$$3x^2-2x-1=0$$

$$(x-1)(3x+1)=0 \quad \therefore\ x=-\frac{1}{3},\ 1$$ 答

(2) x の方程式とみて，

$$3x^2-2(y+1)x+2y^2+y-1=0$$

x は実数であるから，判別式を D とすると $D\geqq 0$ より，

$$\frac{D}{4}=\{-(y+1)\}^2-3\cdot(2y^2+y-1)=-5y^2-y+4\geqq 0$$

$$5y^2+y-4\leqq 0$$

$$(y+1)(5y-4)\leqq 0 \quad \therefore\ -1\leqq y\leqq \frac{4}{5}$$ 答

(3) (2)より，y が整数のとき，$y=-1,\ 0$

$y=-1$ のとき，$3x^2=0$　$\therefore\ x=0$

$y=0$ のとき，(1)より，$x=1$

よって，

$$(x,\ y)=(0,\ -1),\ (1,\ 0)$$ 答

確認問題2
(1) y が整数のとき，　y^2+2 は 5 で割り切れないことを示せ.
(2) $5x^2-2y^2=4$ を満たす整数 x, y は存在しないことを示せ.

解説

(1) すべての整数は，

$5k, 5k\pm1, 5k\pm2$ (k は整数)

のいずれかの形で表すことができる

$y=5k$ のとき，　$y^2+2=5(5k^2)+2$

$y=5k\pm1$ のとき，　$y^2+2=5(5k^2\pm2k)+3$

$y=5k\pm2$ のとき，　$y^2+2=5(5k+4k+1)+2$

よって，　y^2+2 は 5 で割り切れない　終

(2) $5x^2-2y^2=4$

$5x^2=2(y^2+2)$

x, y が整数のとき，$2(y^2+2)$ は 5 の倍数である

2 と 5 は互いに素であるから，

y^2+2 は 5 の倍数でなければならないが，

(1)より，　y^2+2 は 5 の倍数ではないため，

$5x^2-2y^2=4$ を満たす整数 x, y は存在しない　終

確認問題3

(1)　xを自然数とする。このとき，x^2を4で割ったときの余りは，xが偶数のときは0であり，xが奇数のときは1であることを証明せよ。

(2)　自然数の組$(x,\ y)$について，$5x^2+y^2$が4の倍数ならば，$x,\ y$はともに偶数であることを証明せよ。

(3)　自然数の組$(x,\ y)$で$5x^2+y^2=2016$を満たすものをすべて求めよ。

(解説)

(1) x が偶数のとき，$x=2k$ (kは整数) とおける

このとき，$x^2=(2k)^2=4k^2$

よって，x^2を4で割った余りは0

xが奇数のとき，$x=2k+1$ (kは整数) とおける

このとき，$x^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1=4(k^2+k)+1$

よって，x^2を4で割った余りは1

以上より，題意は示された　終

(2) (1)より，$5x^2+y^2$を4で割った余りは，

$(x, y)=$(偶，偶) のとき，$5\cdot 0+0=0$

$(x, y)=$(偶，奇) のとき，$5\cdot 0+1=1$

$(x, y)=$(奇，偶) のとき，$5\cdot 1+0\equiv 1 \pmod 4$

$(x, y)=$(奇，奇) のとき，$5\cdot 1+1\equiv 2 \pmod 4$

よって，題意は示された　終

(3) $5x^2+y^2=2016$

2016は4の倍数であるから，x, yは偶数より，

$x=2x_1, y=2y_1$ (x_1, y_1は自然数)とおけ，このとき，

$$5{x_1}^2+{y_1}^2=504$$

504は4の倍数であるから，x, yは偶数より，

$x_1=2x_2, y_1=2y_2$ (x_2, y_2は自然数)とおけ，このとき，

$$5{x_2}^2+{y_2}^2=126$$

${y_2}^2\geqq 1$ であるから，$5{x_2}^2\leqq 125$　$\therefore\ {x_2}^2\leqq 25$

このとき，$x_2=1, 2, 3, 4, 5$

これを満たす自然数x_2, y_2の組は，

$$(x_2, y_2)=(1, 11), (3, 9), (5, 1)$$

$x=2x_1=2\cdot 2x_2=4x_2, y=4y_2$ より

$$(x, y)=(4, 44), (12, 36), (20, 4)$$　答

確認問題4

k, l, m, n は自然数とする。条件 $klmn=k+l+m+n$, $k \leqq l \leqq m \leqq n$ を満たす組(k, l, m, n)をすべて求めよ。

解説

$k \leqq l \leqq m \leqq n$ より

$$klmn=k+l+m+n \leqq n+n+n+n=4n$$

$$klmn \leqq 4n$$

両辺を $n\,(>0)$ で割ると

$$klm \leqq 4$$

$1 \leqq k \leqq l \leqq m$ より

$$k \cdot k \cdot k \leqq klm \leqq 4$$

$$\therefore\ k^3 \leqq 4$$

k は自然数であるから, $k=1$

このとき, $klm \leqq 4$ より, $lm \leqq 4$

これを満たす自然数 l, m の組は

$$(l, m)=(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2)$$

よって,

$$(k, l, m, n)=(1, 1, 2, 4)$$ 答