微分の計算　3.三角関数の導関数

$\boxed{1}$

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^\circ}{x}$　(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin 3x}$　(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{1-\cos x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x+\sin 5x}{\sin 2x}$　(8) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\sin\frac{x}{\pi}\right)}{x}$

$\boxed{2}$

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{x+1}-1}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+3}\sin(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})$

$\boxed{3}$

次の極限値を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{x-\pi}$　(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}$

$\boxed{4}$ [(1) 2008 愛媛大　(2) 小樽商科大　(3) 2002 大阪市立大]

(1) p，q を実数とする。$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{p+q\cos x}{x^2}=1$ のとき，p，q の値を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sqrt{px+q}-1}=2$ のとき，p, q の値を求めよ.

(3) 次の極限が有限の値となるように定数 a，b を定め，そのときの極限値を求めよ.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9-8x+7\cos 2x}-(a+bx)}{x^2}$$

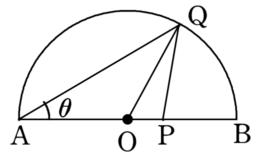
$\boxed{5}$ [(1) 2004 芝浦工業大　(2) お茶の水女子大]

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{ax+b}{\cos x}=\frac{1}{2}$ が成り立つとき，定数 a，b の値を求めよ.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\pi}\frac{\sqrt{a+\cos x}-b}{(x-\pi)^2}=\frac{1}{4}$ となるように定数 a, b を定めよ.

$\boxed{6}$ [日本女子大]

図のような半球形の凹面鏡がある．直径を AB，中心を O，半径を r とする．AB と $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{4}\right)$ の角をなす光線が鏡の点 Q で反射し AB と交わる点を P とする． $\theta\to 0$ とするとき，P はどのような点に近づくか．

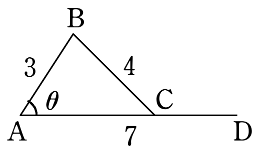


ただし，Q において光線は ∠AQO＝∠OQP となるように反射するものとする．

$\boxed{7}$ [立教大]

右の図において，AB=3, BC=4, AD=7 で，∠BAC の大きさ θ が変化するにしたがって点 C は AD 上を動く．

$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\mathrm{CD}}{\theta^2}$ を求めよ．



$\boxed{8}$ [津田塾大]

面積 1 の正 n 角形 ($n\geqq 3$) の周の長さを $L(n)$ とする．

(1) $L(n)$ を n の式で表せ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)$ を求めよ．

$\boxed{9}$ [1999 東京工業大]

斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える．つまり，底面を正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\cdots\mathrm{A}_n$，頂点を O で表せば $\mathrm{OA}_1=\mathrm{OA}_2=\cdots\cdots=\mathrm{OA}_n=1$ である．そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする．

(1)　C_n の体積 V_n を求めよ．

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ．

$\boxed{10}$ [東京大]

$n\geqq 3$ とし，正 n 角錐の表面を，底面に含まれない n 個の辺で切り開いて得られる展開図を考える．正 n 角錐の頂点は，展開図においては，異なる n 個の点になっている．ここでは，これら n 個の点を通る円の半径が 1 であるような正 n 角錐のみを考えることにする．

(1) 各 n に対して，このような正 n 角錐の体積の最大値 V_n を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ．

微分の計算　3.三角関数の導関数

$\boxed{11}$

$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を既知として，次の(1)〜(3)を証明せよ．ただし，角の単位はラジアンとする．

(1) $(\sin x)'=\cos x$　　(2) $(\cos x)'=-\sin x$　　(3) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

$\boxed{12}$ [(2) 1999 立教大]

次の極限値を計算せよ．

(1) $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)^2-\sin x^2}{h}$　　(2) $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^2\sin^2 x-x^2\sin^2 a}{x-a}$

$\boxed{13}$ [(1) 2007 東京電機大　(2) 日本大　(3) 鹿児島大]

(1) 関数 $f(x)$ が微分可能であるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(x+2h)-f(x)}{\sin h}$ を $f'(x)$ を用いて表せ。

(2) $f'(0)=1$ のとき $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(0+\sin x)-f(0)}{x}=\boxed{}$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin 8x)-f(\tan x)}{x}$ $=\boxed{}$ となる．

(3) $f(x)$ は $x=1$ で微分可能とする．微分係数の定義にもとづいて

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(2-\cos x)-f(1)}{x^2}$$

を $f'(1)$ で表せ．

$\boxed{14}$

Ⅰ．次の関数を微分せよ．

(1) $y=\sin(2x-3)$　　(2) $y=\cos^2 x$　　(3) $y=\sin^2 3x$

(4) $y=\dfrac{1}{\tan x}$　　(5) $y=\sqrt{\cos x}$　　(6) $y=x\sin x+\cos x$

(7) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

Ⅱ．$x=\tan y\left(-\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}$ を x の式で表せ．