積分の計算　6. いろいろな積分

$\boxed{1}$

次の定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{-3}^{3}(x^3+x^2+x+1)dx$　　(2) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+3\cos t)^2dt$

(3) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\sin 2x\,dx$

$\boxed{2}$ [(1) 山梨大　(2) 1999 信州大]

(1) $x=\pi-t$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx$ の値を求めよ.

(2) $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ で連続な関数であるとき

$$\int_0^{\pi}xf(\sin x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(\sin x)dx$$

が成立することを示し，これを用いて定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{3+\sin^2 x}dx$ を求めよ.

$\boxed{3}$ [2005 名古屋大]

(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，

$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [1999 大阪市立大]

$\displaystyle I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{x\sin x}{1+\cos x}+\frac{x\cos x}{1+\sin x}\right)dx$ とおく.

(1)　等式　$\displaystyle I=\frac{\pi}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$ を示せ.

(2)　I の値を求めよ.

$\boxed{5}$ [福島大]

(1) 関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たす．このとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_0^{a}f(x)dx$ となることを示せ.

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を計算せよ.

$\boxed{6}$

$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx,\ I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ とおく．

(1) I_1+I_2 を求めよ．

(2) $I_1=I_2$ が成り立つことを示し，その値を求めよ．

$\boxed{7}$ [1999 芝浦工業大]

$I_n=\int_0^1\frac{x^n}{1+x}dx$ ($n=0$，1，2，……) とおく．

I_n+I_{n+1} を n の式で表すと ${}^{ア}\boxed{}$ である．

$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}=a_nI_0+b_nI_n$ とおくと，$a_n={}^{イ}\boxed{}$，$b_n={}^{ウ}\boxed{}$ である．

$\boxed{8}$ [東京工業大]

n を自然数とする．$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x}dx=\frac{\pi}{2}$ を示せ．