漸化式演習　5.連立漸化式

$\boxed{1}$ [1998 関西大]

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ があり，次の関係式

$$a_1=1,\ b_1=0$$

$$3a_{n+1}+a_n+2b_n=0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

$$3b_{n+1}+2a_n+b_n=0 \quad (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

を満たすものとする．このとき，$c_n=a_n+b_n$, $d_n=a_n-b_n$ とおいて，c_n, d_n を n を用いて表すと　$c_n=$ ア$\boxed{}$，$d_n=$ イ$\boxed{}$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ となる．

したがって，$a_n=$ ウ$\boxed{}$，$b_n=$ エ$\boxed{}$　$(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ となる．

$\boxed{2}$ [2013 岩手大]

2 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が

$a_1=2$，$b_1=2$，$a_{n+1}=6a_n+2b_n$，$b_{n+1}=-2a_n+2b_n$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ で定められるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=a_n+b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を求めよ。

$\boxed{3}$ [北海道教育大]

次の関係式で定まる 2 つの数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある．

$$a_1=b_1=1$$

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=4a_n+b_n\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1) 数列 $\{a_n+kb_n\}$ が等比数列となるように，定数 k の値を定めよ．

(2) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ．

$\boxed{4}$ [慶応大]

(1) $n=1, 2, \cdots\cdots$ に対して，$(\sqrt{2}+1)^n=a_n+\sqrt{2}\,b_n$ により自然数 a_n, b_n を定義する．このとき，$(\sqrt{2}-1)^n$ を a_n, b_n を用いて表せ．また，${a_n}^2-2{b_n}^2$ の値を求めよ．

(2) 適当な自然数 k_n を用いて，$(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k_k}-\sqrt{k_n-1}$ $(n=1, 2, \cdots\cdots)$ と表せることを示せ．

$\boxed{5}$［2001 中央大］

自然数 n に対して，正の整数 a_n，b_n を $(3+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ によって定める．

(1)　a_1，b_1 と a_2，b_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n を用いて表せ．

(3)　n が奇数のとき，a_n，b_n はともに奇数であって，n が偶数のとき，a_n は奇数で，b_n は偶数であることを数学的帰納法によって示せ．