高3数学$\boldsymbol{\alpha}$　数学Ⅲスタ演　2.複素数と図形(1)

$\boxed{1}$［2002 京都産業大］

複素数平面上で，0，$\sqrt{3}+i$，α を表す点をそれぞれ O，A，B とする．△OAB が正三角形になるとき，α の値を求めよ．ここで，i は虚数単位を表す．

$\boxed{2}$［1999 奈良女子大］

(1)　複素数平面上の 3 点 0，z，z^2 を頂点とする三角形が正三角形となるような複素数 z をすべて求めよ．

(2)　どのような複素数 z に対しても，4 点 0，z，z^2，z^3 を頂点とする四角形は正方形とならないことを示せ．

$\boxed{3}$［2001 慶応義塾大］

複素数平面上に 3 点 $z_1=-1+i$，$z_2=(\sqrt{3}-1)+2i$，実部を負の数とする z_3 をとる．3 つの点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形が正三角形であるのは，$z_3=\boxed{}$ のときである．

$\boxed{4}$［1996 福岡教育大］

複素数平面上に，正方形の頂点 A, B, C, D がこの順に反時計回りに並んでいる．
点 A, B の表す複素数を，それぞれ $1+i$, $-1+2i$ とするとき，点 C, D の表す複素数を求めよ．

$\boxed{5}$［2016 岩手大］

複素数平面上で，点 $\mathrm{P}(1-\sqrt{3}\,i)$ を中心とする円に内接する正三角形がある。この正三角形の頂点の 1 つが点 $\mathrm{A}(2)$ であるとき，残りの 2 つの頂点を表す複素数を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

$\boxed{6}$［2016 名城大］

複素数 $z=a+bi$ (a，b は実数) とし，$p=2+3i$ とする。複素数平面上で，点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を u，点 z を点 p を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を w とするとき，次の問いに答えよ。

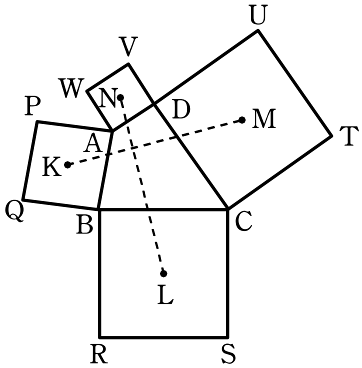
(1)　u を a，b を用いて表せ。

(2)　w を a，b を用いて表せ。

(3)　$u=w$ となるとき，a，b の値を求めよ。

$\boxed{7}$ [1999 信州大]

図のように，複素数平面上に四角形ABCDがあり，4点A，B，C，Dを表す複素数をそれぞれz_1，z_2，z_3，z_4とする．各辺を1辺とする4つの正方形BAPQ，CBRS，DCTU，ADVWを四角形ABCDの外側に作り，正方形BAPQ，CBRS，DCTU，ADVWの中心をそれぞれK，L，M，Nとおく．



(1)　点Kを表す複素数w_1をz_1とz_2で表せ．

(2)　KM＝LN，KM⊥LNを証明せよ．

(3)　線分KMと線分LNの中点が一致するのは四角形ABCDがどのような図形のときか．

$\boxed{8}$ [2001 岐阜大]

α，βは，等式$3\alpha^2-6\alpha\beta+4\beta^2=0$を満たす0でない複素数とする．

(1)　複素数$\dfrac{\alpha}{\beta}$を極形式で表せ．ただし，偏角θの範囲は$0°\leqq\theta<360°$とする．

(2)　複素数平面上で複素数0，α，βを表す点をそれぞれO，A，Bとするとき，∠AOBおよび∠OABを求めよ．

$\boxed{9}$ [2001 防衛大学校]

複素平面上に3点A(α)，B(β)，C(γ)がある．$\dfrac{\alpha-\gamma}{\beta-\gamma}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$|\alpha-\gamma|=4$とするとき，△ABCの面積を求めよ．

$\boxed{10}$ [1998 金沢大]

複素数平面上で，複素数α, β, γを表す点をそれぞれA, B, Cとする．

(1)　A, B, Cが正三角形の3頂点であるとき，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=0$ …… (*) が成立することを示せ．

(2)　逆に，この関係式(*)が成立するとき，A＝B＝Cとなるか，またはA, B, Cが正三角形の3頂点となることを示せ．

$\boxed{11}$［2014 早稲田大］

複素数 z を $z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ の値を求めよ。

(2)　複素数平面において，1，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 が表す点を，それぞれ P_0，P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_4$ の重心を $\mathrm{Q}(\alpha)$，$\triangle\mathrm{P}_3\mathrm{P}_5\mathrm{P}_6$ の重心を $\mathrm{R}(\beta)$ とおくとき，複素数 α と β を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_0\mathrm{QR}$ の面積を求めよ。

$\boxed{12}$［2016 広島大］

複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1.　時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。

2.　時刻 1 に P は $\mathrm{Q}_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。

3.　以下同様に，時刻 n に P は $\mathrm{Q}_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $\mathrm{Q}_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　z_3，z_4 を求めよ。

(2)　z_n を α，n を用いて表せ。

(3)　P が $\mathrm{Q}_1(z_1)$，$\mathrm{Q}_2(z_2)$，…… と移動するとき，P はある点 $\mathrm{Q}(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4)　z_n の実部が (3) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。