積分の計算　5.置換積分法(2)

$\boxed{1}$ [Ⅰ．慶応大　Ⅱ．東京理科大]

Ⅰ．不定積分 $I=\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ を，$\sqrt{1+x^2}+x=t$ とおいて求めると，$I=\boxed{}$ である．

Ⅱ．$x=\dfrac{1}{2}(e^t-e^{-t})$ とする．

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ を t で表せ．　(2) t を x で表せ．

(3) 不定積分 $\int e^t dx$ をまず t で表し，次いで x で表せ．

(4) 上記を利用して，不定積分 $\int\sqrt{1+x^2}\,dx$ を x で表せ．

$\boxed{2}$ [2004 横浜市立大]

(1)　関数 $\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ を微分せよ．

(2)　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ の値を求めよ．

$\boxed{3}$ [2002 芝浦工業大]

$\tan\dfrac{\theta}{2}=x$ とおくとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ を x で表すと $\sin\theta=$ ア$\boxed{}$，$\cos\theta=$ イ$\boxed{}$

これらを利用すると $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}=$ ウ$\boxed{}$

$\boxed{4}$

次の不定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x}$　(2) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos x}$

$\boxed{5}$ [1998 東京理科大]

$\dfrac{1}{(1-t^2)^2}$ を部分分数に分解すると

$\dfrac{1}{(1-t^2)^2}=\dfrac{ア\boxed{}}{(1-t)^2}+\dfrac{イ\boxed{}}{1-t}+\dfrac{ウ\boxed{}}{(1+t)^2}+\dfrac{エ\boxed{}}{1+t}$ となる．

また，積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^3 x}$ の値は オ$\boxed{}+\dfrac{1}{2}\log\left(カ\boxed{}\right)$ である．