$n$ を 2 以上の自然数とする．いま，$n$ チームが総当たり戦を行う．ただし，2 つのチームが対戦するときの勝敗の確率は $\dfrac{1}{2}$ とする．

(1)　$n$ チームのうち全勝の成績を残すチームが現れる確率 $P_1$ を求めよ．

(2)　全勝の成績を残すチームと全敗の成績を残すチームがともに現れる確率 $P_2$ を求めよ．

(3)　全勝あるいは全敗の成績を残すチームが現れない確率 $P_3$ を求めよ．

(01　豊橋技術科学大)

(解説)

(1) $n$ チームを $a_1, a_2, \cdots, a_n$ とする

$a_1$ が全勝するとき

$a_1$ を含む $n-1$ 試合はすべて $a_1$ が勝って

あとの試合はどちらが勝ってもよい

$a_2$ から $a_n$ が全勝するときも同様

よって

$$P_1 = n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2) $a_1$ が全勝し，$a_2$ が全敗するとき

$a_1$ を含む $n-1$ 試合はすべて $a_1$ が勝って

$a_2$ を含む $a_1$ との試合以外の $n-2$ 試合はすべて $a_2$ が負けて

あとの試合はどちらが勝ってもよい

誰が全勝しても，誰が全敗してもよいから

$$P_2 = n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$

(3) $A$ ：全勝のチームが現れる

$B$ ：全敗のチームが現れる　事象とする

求める確率は $P(\overline{A \cup B})$

$$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$$ （ド•モルガン）

ここで

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 2 \times n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \\ &= n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} - n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3} \end{aligned}$$

よって

$$P_3 = P(\overline{A \cup B}) = 1 - n \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + n(n-1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}$$