$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ とおく.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x\,dx$ の値を求めよ.

(2) $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおいて置換積分することにより，$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$ を示せ.

(3) I の値を求めよ.

(04　大同工業大)

(解説)

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cdot(\sin x)'dx=\left[\frac{1}{2}\sin^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

(2) $x=\frac{\pi}{2}-t$ より $\frac{dx}{dt}=-1$

$$I=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{\sin^3\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\cos t+\sin t}dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 t}{\sin t+\cos t}dt$$

(3) $J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくと

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)(\sin^2 x-\sin x\cos x+\cos^2 x)}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x\cos x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}$$

$I=J$ より

$$I=\frac{\pi-1}{4}$$