高3数学α　数学Ⅲスタ演　21.不等式への応用

$\boxed{1}$ [2000 大阪医科大]

e は自然対数の底とする．

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x+\dfrac{x^2}{2}$ を示せ．

(2)　(1) の結果を用いて，極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$ を求めよ．

(3)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ke^{-k}$ とする．極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ．

$\boxed{2}$ [1996 徳島大]

次の各問いに答えよ．ただし，$e=2.718\cdots$ は自然対数の底である．

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ．

(2)　k を正の整数とするとき，不等式 $e>\left(1+\dfrac{1}{k}\right)^k$ が成り立つことを示せ．

(3)　任意の正の整数 n に対し，不等式 $n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ が成り立つことを数学的帰納法により証明せよ．

(4)　$99!>33^{99}, 272!>10^{544}$ であることを示せ．

$\boxed{3}$ [2005 静岡大]

(1)　すべての実数 t に対して，不等式 $e^t\geqq 1+t$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(2)　実数 t_j $(j=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して，$x_j=e^{t_j}$ とおく。$x_1x_2\cdots\cdots x_n=1$ のとき，不等式

$$x_1+x_2+\ \cdots\cdots\ +x_n\geqq n$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つ場合はどのようなときか。

(3)　$x_1>0,\ x_2>0,\ \cdots\cdots,\ x_n>0$ のとき，不等式

$$\frac{x_1+x_2+\ \cdots\cdots\ +x_n}{n}\geqq\sqrt[n]{x_1x_2\cdots\cdots x_n}$$

が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つ場合はどのようなときか。

$\boxed{4}$［2007 大阪工業大］

$f(x)=\sqrt{x}-\log x$ とする。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の増減を調べよ。

(3)　$x>0$ のとき $f(x)>0$ であることを示せ。ただし，$2<e<3$ である。

(4)　(3) を利用して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を示せ。

$\boxed{5}$［2015 大分大］

正の実数 p_i，q_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i=\sum_{i=1}^{n}q_i=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $\log x\leqq x-1$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i\geqq\sum_{i=1}^{n}p_i\log q_{\mathrm{i}}$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$\displaystyle F=\sum_{i=1}^{n}p_i\log p_i$ の最小値を求めよ。

(4)　正の実数 a_i $(i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n)$ に対して，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i$ が定数であるとき，$\displaystyle G=\sum_{i=1}^{n}a_i\log a_i$ の最小値を求めよ。

$\boxed{6}$［2008 神戸大］

(1)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x\geqq\dfrac{2}{\pi}x$ を示せ。

(2)　n を自然数とする。$\dfrac{\pi}{2n}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$n\sin x\geqq1$ を示せ。

(3)　n を自然数とする。$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2n}$ のとき，$n\sin x\geqq\sin nx$ を示せ。

(4)　n を 4 で割って 1 余る自然数とする。$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$n\cos x\geqq\cos nx$ を示せ。

$\boxed{7}$［2006 滋賀医科大］

$\log x$ を自然対数，n を自然数として，次の各不等式を証明せよ。ただし，等号成立条件には言及しなくてよい。

(1)　$0<a<b$，$a \leqq x \leqq b$ のとき，$\log x \geqq \log a+\dfrac{x-a}{b-a}(\log b-\log a)$

(2)　a_1，$a_2>0$ とし，p_1，$p_2 \geqq 0$，$p_1+p_2=1$ のとき，

$$\log(p_1 a_1+p_2 a_2) \geqq p_1 \log a_1+p_2 \log a_2$$

(3)　a_1，a_2，……，$a_n>0$ とし，p_1，p_2，……，$p_n \geqq 0$，$p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$ のとき，

$$\log \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \geqq \sum_{i=1}^{n} p_i \log a_i$$

(4)　a_1，a_2，……，$a_n>0$ のとき，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots\cdots a_n}$