高3数学α　数学Ⅲスタ演　13.関数の極限と連続

$\boxed{1}$［1999 工学院大］

$f(x)=\dfrac{x^3+ax^2+bx-2}{x^2-3x+2}$ とする．$\displaystyle\lim_{x\to1}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to2}f(x)$ がともに有限の値であるとき，a，b を求めよ．

$\boxed{2}$［2009 京都産業大］

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+ax}-bx\right)=2$ のとき，$(a,\ b)=\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$［2006 関西大］

$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin\left(\sin\dfrac{x}{\pi}\right)}{x}$ を求めよ。

$\boxed{4}$［2008 愛媛大］

p，q を実数とする。$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{p+q\cos x}{x^2}=1$ のとき，p，q の値を求めよ。

$\boxed{5}$［2012 法政大］

a，b を実数の定数とする。$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\tan5x-\sin5x}{(ax)^b}=4$ のとき，$a=^{ア}\boxed{}$，$b=^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{6}$［2011 愛知教育大］

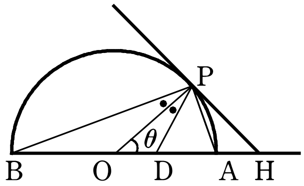
θ を$0\leqq\theta\leqq\pi$ を満たす実数とする。単位円周上の点 P を，動径 OP と x 軸の正の部分とのなす角が θ である点とし，点 Q を x 軸の正の部分の点で，点 P からの距離が 2 であるものとする。また，$\theta=0$ のときの点 Q の位置を A とする。

(1)　線分 OQ の長さを θ を使って表せ。

(2)　線分 QA の長さを L とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to0}\frac{L}{\theta^2}$ を求めよ。

7 ［2014 金沢工業大］

図のように，点 O を中心とし，線分 AB を直径とする半径 1 の半円において，円周上に点 P をとり，$\angle\mathrm{POA}=\theta$ とし，点 P における接線が線分 OA の延長と交わる点を H とする。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。



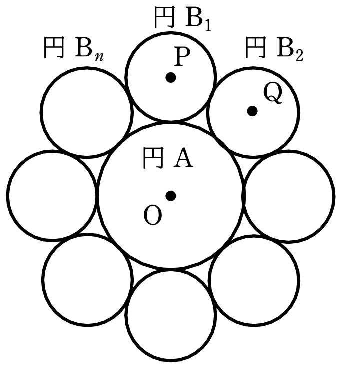
さらに，線分 OA 上に $\angle\mathrm{OPB}=\angle\mathrm{OPD}$ となるように点 D をとる。

(1)　$\mathrm{AP}=$ ア$\square\,\sin\dfrac{\theta}{\text{イ}\square}$ である。　(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AP}}{\theta}=$ ウ$\square$ である。

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{\mathrm{AH}}{\theta^2}=\frac{\text{エ}\square}{\text{オ}\square}$ である。　(4)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\mathrm{OD}=\frac{\text{カ}\square}{\text{キ}\square}$ である。

8 ［2018 京都産業大］

点 O を中心とする半径 1 の円を A とし，n は 3 以上の整数とする。円 A の外側に，円 A と外接する半径の等しい n 個の円 B_1，B_2，……，B_n を，互いに外接するように，右図のように配置する (図は $n=8$ の場合である)。例えば，B_1 は B_n および B_2 と接し，B_2 は B_1 および B_3 と接する。円 B_i ($i=1$，2，……，n) の半径を r とし，円 B_1，B_2 の中心をそれぞれ P，Q とする。



(1)　$\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，r の値は ア$\square$ である。

(2)　r は n を用いて，$r=\dfrac{\sin\left(\text{イ}\square\right)}{1-\sin\left(\text{イ}\square\right)}$ と表される。$n=4$ のとき，r の値は ウ$\square$ であり，$n=12$ のとき，r の値は $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{\text{エ}\square-\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ である。

(3)　n 個の円 B_1，B_2，……，B_n の円周の長さの総和を R_n とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R_n=$ オ$\square$ である。また，円 B_1，B_2，……，B_n の面積の総和を S_n とすると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n=$ カ$\square$ である。

$\boxed{9}$ [2015 東京理科大]

極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-3}\right)^x$ を求めよ。

$\boxed{10}$ [1996 小樽商科大]

$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ を使うと

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log|1+x|}{x}=\boxed{}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\boxed{}$

$\boxed{11}$ [1999 岩手大]

関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\cos x-1}{x^2} & (x\neq0)\\ A & (x=0)\end{cases}$ で定義する．関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続になるように定数 A の値を定めよ．

$\boxed{12}$ [2005 鳥取大]

関数 $\displaystyle f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{ax^{2n-1}-x^2+bx+c}{x^{2n}+1}$ について，次の問いに答えよ。ただし，a，b，c は定数で，$a>0$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ が x の連続関数となるための定数 a，b，c の条件を求めよ。

(2)　定数 a，b，c が(1)で求めた条件を満たすとき，関数 $f(x)$ の最大値とそれを与える x の値を a を用いて表せ。

(3)　定数 a，b，c が(1)で求めた条件を満たし，関数 $f(x)$ の最大値が $\dfrac{5}{4}$ であるとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

$\boxed{13}$［2017 立教大］

a を実数とする。関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=1-x+x^2+a[x]-2x[x]+[x]^2$$

ただし，実数 x に対し，記号 $[x]$ は $n \leqq x < n+1$ を満たす整数 n を表す。たとえば $[0]=0$，$[\sqrt{2}]=1$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$ である。

(1)　$0 \leqq x < 1$ の範囲において，$f(x)$ を x の整式で表せ。

(2)　$1 \leqq x < 2$ の範囲において，$f(x)$ を a を用いた x の整式で表せ。

(3)　$f(x)$ が $x=1$ で連続であるように，a の値を定めよ。

(4)　$f(x+1)-f(x)$ を a を用いて表せ。ただし，$[x+1]=[x]+1$ であることは証明せずに用いてよい。

(5)　a を (3) で定めた値とする。n を正の整数とするとき，$\displaystyle\int_0^n f(x)\,dx$ を n を用いて表せ。