

高3数学α 数学Ⅲスタ演 22.平均値の定理・速度

① [1998 富山医科薬科大]

- (1) 平均値の定理を述べよ。
- (2) $x \geq 0$ で連続で、 $x > 0$ で微分可能な関数 $f(x)$ が、 $f(0) = 0, f'(x) > 0$ を満たすとす
る。このとき、平均値の定理を用いて、 $f(x) > 0 (x > 0)$ を示せ。
- (3) $e^x > 1 + x (x > 0)$ を示せ。
- (4) 関数 $g(x)$ を $g(x) = \begin{cases} \log \frac{e^x - 1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$ とするとき、 $g(x)$ は $x = 0$ で連続である
ことを示せ。
- (5) $x > 0$ のとき $0 < \log \frac{e^x - 1}{x} < x$ を示せ。

② [2002 金沢大]

すべての正の数 x, y に対して、不等式 $x(\log x - \log y) \geq x - y$ が成り立つことを証明
せよ。また、等号が成り立つのは $x = y$ の場合に限ることを示せ。

③ [2004 信州大]

不等式 $|\sin x - \sin y| \leq k|x - y|$ がすべての角度 x ラジアン、 y ラジアンについて成り立
つような定数 k の最小値を求めよ。

④ [2012 芝浦工業大]

次の極限值を求めよ。

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{\sin x - x} = \boxed{\quad}$$

⑤ [2013 津田塾大]

$f(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 4})$ とおく。

- (1) $f(c) = c$ となる実数 c がただ1つ存在することを示せ。
- (2) 平均値の定理を用いて、 $a \neq b$ のとき $|f(a) - f(b)| \leq \frac{1}{2}|a - b|$ が成り立つことを示
せ。
- (3) p を任意の実数とし、数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = p, a_{n+1} = f(a_n) (n \geq 1)$ で定める。
 c を $f(c) = c$ を満たす数とする。 $|a_n - c|$ を考えることにより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ を示せ。

高3数学α 数学Ⅲスタ演 22.平均値の定理・速度

6 [2010 鳥取大]

a, k は定数であり, $0 < k < 1$ とする。

- (1) 方程式 $x = a + k \sin x$ はただ1つの実数解をもつことを示せ。
- (2) 不等式 $|\sin \theta| \leq |\theta|$ がすべての実数 θ に対して成立することを示せ。
- (3) 不等式 $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$ がすべての実数 α, β に対して成立することを示せ。
- (4) 数列 $\{x_n\}$ を, $x_0 = 0, x_n = a + k \sin x_{n-1}$ ($n = 1, 2, \dots$) によって定める。数列 $\{x_n\}$ は (1) の方程式 $x = a + k \sin x$ の解に収束することを示せ。

7 [2010 香川大]

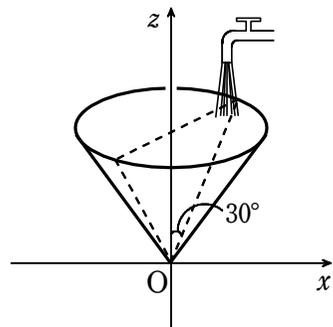
座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 時刻 t における点 P の速度 \vec{v} およびその大きさ $|\vec{v}|$ を求めよ。
- (2) $t = \frac{\pi}{2}$ のとき、ベクトル \vec{v} が x 軸の正の向きとのなす角 α を求めよ。
- (3) 原点を O とするとき、ベクトル \vec{v} とベクトル \overrightarrow{OP} のなす角 θ は一定であることを示し、 θ を求めよ。

8 [2002 甲南大]

図のように頂角 60° の円錐形の容器を頂点を下にして軸を鉛直にしておく。この容器に一定の割合 a ($\text{m}^3/\text{秒}$) で水を入れたときの水面の上昇を考える。

- (1) 水面の高さが z (m) のとき、水の体積 V (m^3) を求めよ。
- (2) 水面の上昇速度を k (m/秒) とし、容器に入った水の体積 V (m^3) を時間 t (秒) で微分した量 $\frac{dV}{dt}$ を z と k を用いて表せ。(微分するとき、 z が時間 t の関数であることに注意せよ。)



- (3) 水面の高さが h (m) に達したとき、水面の上昇速度 k (m/秒) を a と h を用いて表せ。