

$f(x)$ を閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数とする。

(1) $x = \pi - t$ において等式 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x f(\sin x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\pi - t) f(\sin t) dt$ が成り立つことを証明せよ。

(2) 等式 $\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx$ が成り立つことを証明せよ。

(3) 定積分 $\int_0^{\pi} x \sin^3 x dx$ を求めよ。