高3数学α　数学Ⅲスタ演　21.不等式への応用

$\boxed{1}$［2013 同志社大］

n を自然数とする。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを数学的帰納法を用いて示せ。

$$e^x>1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots\cdots+\frac{x^n}{n!}$$

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ を求めよ。

$\boxed{2}$［2007 横浜市立大］

(1)　すべての実数 x に対して，不等式 $x\leqq e^{x-1}$ が成り立つことを示せ。

(2)　正の数 $x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots,\ x_n$ が $x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n=n$ を満たすとき，$x_1x_2\cdots\cdots x_n\leqq 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　正の数 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_n$ に対して，$A=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$ とするとき，

$a_1a_2\cdots\cdots a_n\leqq A^n$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$［2017 中央大］

(1)　$x>-1$ において，不等式 $\log(1+x)\leqq x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，不等式 $x-\dfrac{x^2}{2}\leqq\log(1+x)$ が成り立つことを示せ。

(3)　自然数 n に対し

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

と定める。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

$\boxed{4}$ [1996 京都工芸繊維大]

(1)　$x \geqq 0$ のとき $x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ が成り立つことを示せ．

(2)　関数 $f(x)$ を次のように定義する．$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & (x \neq 0) \\ 1 & (x=0) \end{cases}$

このとき，$f(x)$ の $x=0$ における微分係数 $f'(0)$ の値を求めよ．

$\boxed{5}$ [2008 お茶の水女子大]

(1)　a，b を異なる実数とし，関数 $f(x)$ が a，b を含む区間で第 2 次導関数 $f''(x)$ をもち $f''(x)<0$ が成り立つものとする。このとき $0 \leqq t \leqq 1$ に対して，

$$tf(a)+(1-t)f(b) \leqq f(ta+(1-t)b)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)=\log x$ に (1) の結果を適用することにより，正の数 a，b，c に対して，

$$\sqrt[3]{abc} \leqq \frac{a+b+c}{3}$$

が成り立つことを示せ。ただし，$\log x$ は自然対数とする。

$\boxed{6}$ [1997 岐阜大]

$0<a<b$ のとき，不等式 $\sqrt{ab}<\dfrac{b-a}{\log b-\log a}<\dfrac{a+b}{2}$ が成り立つことを示せ．ただし，対数は自然対数とする．

$\boxed{7}$ [2005 高知女子大]

x と y が $0 \leqq x \leqq y \leqq \pi$ を満たすとき，不等式

$$(x-y)\sin x-\cos y+\cos x \leqq 1-\cos(y-x) \leqq \frac{(y-x)^2}{2}$$

が成り立つことを証明せよ。