$f(x)$ を，定義域が実数全体であり値が実数である関数とする。すべての実数 x に対して $f(-x)=f(x)$ を満たすとき，$f(x)$ を偶関数とよぶ。また，すべての実数 x に対して $f(-x)=-f(x)$ を満たすとき，$f(x)$ を奇関数とよぶ。

(1)　$f(x)$ が偶関数かつ奇関数ならば，すべての x に対して $f(x)=0$ であることを示せ。

(2)　$f(x)$ が連続な奇関数であるとき，任意の $a>0$ に対して $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　一般に $f(x)$ は，偶関数と奇関数の和としてただ 1 通りに表せることを示せ。

(14　上智大)

解説

(1) $f(x)$ が偶関数かつ奇関数であるとすると，すべての実数 x に対して

$f(-x)=f(x)$ かつ $f(-x)=-f(x)$

よって

$f(x)=-f(x)$　　$\therefore\ f(x)=0$

したがって，$f(x)$ が偶関数かつ奇関数ならば，すべての x に対して $f(x)=0$ である

(2) $\int_{-a}^{a} f(x)dx=\int_{-a}^{0} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx$

ここで，$\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において $x=-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$-a \longrightarrow 0$
t	$a \longrightarrow 0$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=-\int_{0}^{a} f(x)dx$$

よって

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=-\int_{0}^{a} f(x)dx+\int_{0}^{a} f(x)dx=0$$

(3) $g(x)$ を偶関数，$h(x)$ を奇関数として，$f(x)=g(x)+h(x)$ …① と表せるとすると

$f(-x)=g(-x)+h(-x)$　　$\therefore\ f(-x)=g(x)-h(x)$ …②

①+②より

$$f(x)+f(-x)=2g(x)\qquad \therefore\ g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

①−②より

$$f(x)-f(-x)=2h(x)\qquad \therefore\ h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

このとき，$g(-x)=g(x), h(-x)=-h(x)$ より，$g(x)$ は偶関数，$h(x)$ は奇関数であるから，$g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$ とすればよい

次に，$f(x)=g'(x)+h'(x)$ …③ と表せるとすると，

②−③より

$0=g(x)-g'(x)+h(x)-h'(x)$

$\therefore\ g(x)-g'(x)=h'(x)-h(x)$

偶関数どうしの和(差)は偶関数であり，奇関数どうしの和は奇関数であるから，
このとき，$g(x)-g'(x)$ は偶関数かつ，$h'(x)-h(x)$ に等しいから奇関数となり
(1)より，$g(x)-g'(x)=0$ $\therefore\ g'(x)=g(x)$
同様に $h'(x)=h(x)$
よって，$f(x)$ を偶関数と奇関数の和で表す表し方は 1 通りである

$\boxed{注}$

(3)のはじめは，$g(x)$ を偶関数，$h(x)$ を奇関数として，
$f(x)=g(x)+h(x)$ と表せると仮定して話を進めているので，
最後にそのような $g(x), h(x)$ が存在することを示しています。
したがって，前半の $g(x), h(x)$ を導く過程は省いてもよい。
ちなみに，$f(x)$ が連続な偶関数であるとき，任意の $a>0$ に対して

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

が成り立ちます。

$\int_{-a}^{0} f(x)dx$ において $x=-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx=\int_{a}^{0} f(-t)\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a} f(x)dx$$

が成り立つからです。