

関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

で定める。ただし、 e は自然対数の底である。また、

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \cos^2 x \, dx, \quad I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \sin^2 x \, dx$$

とおく。

(1) $g(x) = g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ を示せ。

(2) $I_1 = I_2$ を示せ。

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x) \, dx$, I_1 の値をそれぞれ求めよ。