区間$\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$で連続な関数$f(x)$に対し，等式$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$が成り立つことを証明せよ。さらに，それを利用して定積分$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}dx$の値を求めよ。

(14　福井大)

解説

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ において $x=\dfrac{\pi}{2}-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

| $x$ | $0 \to \dfrac{\pi}{2}$ |
|---|---|
| $t$ | $\dfrac{\pi}{2} \to 0$ |

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$$

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくと，この結果より

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)}{\cos x+\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x+\cos x}dx$$

$J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくと，$I=J$

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x-\cos 3x}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(3\sin x-4\sin^3 x)-(4\cos^3 x-3\cos x)}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3(\cos x+\sin x)-4(\cos^3 x+\sin^3 x)}{\cos x+\sin x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{3-4(1-\cos x\sin x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \{-1+4\sin x\cdot(\sin x)'\}dx$$

$$=\Big[-x+2\sin^2 x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{\pi}{2}+2$$

よって，

$$I=1-\frac{\pi}{4}$$