$a>0$ とする。$f(x)$ を，閉区間 $[0,\ a]$ で連続な実数値関数で，

$f(x)+f(a-x) \fallingdotseq 0\ (0 \leqq x \leqq a)$ とする。$\displaystyle\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx=b$ のとき

$\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ の値を求めよ。

(07　早稲田大)

(解説)

$I=\displaystyle\int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}dx$ とおく。

x	$\frac{a}{2} \longrightarrow a$
t	$\frac{a}{2} \longrightarrow 0$

$x=a-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

$$I=\int_{\frac{a}{2}}^{0} \frac{f(a-t)}{f(a-t)+f(t)} \cdot (-1)dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{f(a-t)}{f(t)+f(a-t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{f(t)+f(a-t)-f(t)}{f(t)+f(a-t)}dt$$

$$=\int_0^{\frac{a}{2}} \left\{1-\frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}\right\}dt$$

$$=\Big[t\Big]_0^{\frac{a}{2}}-\int_0^{\frac{a}{2}} \frac{f(t)}{f(t)+f(a-t)}dt=\frac{a}{2}-b$$