

定積分 $\int_{-1}^1 (\sin \pi x - ax - b)^2 dx$ を最小にする実数 a, b を求めよ。

(18 一橋大)

解説

$$I = \int_{-1}^1 (\sin \pi x - ax - b)^2 dx \text{ とおく}$$

$$= \int_{-1}^1 \{ \sin^2 \pi x - 2(ax + b)\sin \pi x + (ax + b)^2 \} dx$$

$$= 2 \int_0^1 (\sin^2 \pi x - 2ax \sin \pi x + a^2 x^2 + b^2) dx$$

ここで

$$\int_0^1 \sin^2 \pi x dx = \int_0^1 \frac{1}{2} (1 - \cos 2\pi x) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^1 x \sin \pi x dx = \left[-\frac{x \cos \pi x}{\pi} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{\cos \pi x}{\pi} dx = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin \pi x}{\pi} \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}$$

$$\int_0^1 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

より

$$I = 1 - \frac{4}{\pi} a + \frac{2}{3} a^2 + 2b^2$$

$$= \frac{2}{3} \left\{ a^2 - \frac{6}{\pi} a \right\} + 2b^2 + 1$$

$$= \frac{2}{3} \left(a - \frac{3}{\pi} \right)^2 + 2b^2 - \frac{6}{\pi^2} + 1$$

$a = \frac{3}{\pi}, b = 0$ のとき, I は最小となる