高3数学α　数学Ⅲスタ演　16.導関数

$\boxed{1}$ [2007 広島市立大]

$f(x)$ は実数全体で定義された関数とする。

(1)　関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能であることの定義を述べよ。

(2)　関数 $f(x)$ が $x=a$ において連続であることの定義を述べよ。

(3)　関数 $f(x)$ が $x=a$ において微分可能ならば，$x=a$ において連続であることを証明せよ。

$\boxed{2}$ [2018 岩手大]

関数 $f(x)=x-\sqrt{x^2}$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$\boxed{3}$ [2012 京都工芸繊維大]

a を実数とする。すべての実数 x で定義された関数 $f(x)=|x|(e^{2x}+a)$ は $x=0$ で微分可能であるとする。

(1)　a および $f'(0)$ の値を求めよ。

(2)　導関数 $f'(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

(3)　右側極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f'(x)}{x}$ を求めよ。更に，$f'(x)$ は $x=0$ で微分可能でないことを示せ。

$\boxed{4}$ [2009 防衛大学校]

関数 $f(x)=\begin{cases}\log x & (x \geqq 1)\\ \dfrac{ax+b}{x+1} & (x<1)\end{cases}$ が $x=1$ で微分可能であるような a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ [2007 神戸大]

a を実数とし，関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}a\sin x+\cos x & \left(x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)\\ x-\pi & \left(x>\dfrac{\pi}{2}\right)\end{cases}$$

(1)　$f(x)$ が $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続となる a の値を求めよ。

(2)　(1) で求めた a の値に対し，$x=\dfrac{\pi}{2}$ で $f(x)$ は微分可能でないことを示せ。

$\boxed{6}$ [2003 愛媛大]

関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ の定義は

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

である．この定義に従って，以下の関数の導関数を求めよ．ただし，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e\ (e\text{ は自然対数の底})$$

を必要に応じて用いてよい．

(1)　$f(x)=\sqrt{x}\ \ (x>0)$

(2)　$f(x)=\cos x$

(3)　$f(x)=\log x$ (対数は自然対数)

$\boxed{7}$ [2015 東京理科大]

$f(x)$ および $g(x)$ は $x=a$ で微分可能な関数とする。このとき，極限値

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+3h)g(a+5h)-f(a)g(a)}{h}$$

を $f(a)$，$g(a)$ および微分係数 $f'(a)$，$g'(a)$ を用いて表せ。

$\boxed{8}$ [2005 東京電機大]

極限値 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\log(x+h)-\log(x-h)}{h}$ を求めよ。

$\boxed{9}$ [2001 立命館大]

以下の極限値を求めよ．ただし，極限値がない場合は「なし」と記入せよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ ($a>1$：定数)

$\boxed{10}$ [2006 関西大]

$x=y^2+2y+1$ ($y<-1$) について $\dfrac{dy}{dx}$ を x で表せ。

高3数学α　数学Ⅲスタ演　16.導関数

$\boxed{11}$［2011 奈良教育大］

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)$ $(x>0)$ の逆関数を求めよ。

(2)　関数 $g(x)=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ の逆関数 $h(x)$ を求めよ。

(3)　(2) で求めた関数 $h(x)$ の導関数を求めよ。

$\boxed{12}$［2010 関西大］

関数 $f(x)=x^{\log x}$　$(x>0)$ の導関数を求めよ。

$\boxed{13}$［2009 埼玉大］

$g(x)=\sqrt{\dfrac{x^3(x+2)}{(x+1)^5}}$　$(x>0)$ とおくとき，$\dfrac{g'(x)}{g(x)}$ を求めよ。

$\boxed{14}$［2008 茨城大］

関数 $f(x)=\dfrac{(x+3)^3(x-5)^2}{(x+1)^2e^{x}}$ について，$f'(0)$ の値を求めよ。ただし，e は自然対数の底である。

$\boxed{15}$［2009 三重大］

正の整数 n に対し，x の整式 $T_n(x)$ が等式 $T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ をすべての実数 θ に対し満たしているとする。

(1)　$T_1(x)$ および $T_2(x)$ を求めよ。

(2)　$T_n(x)$ の導関数 $T_n{}'(x)$ に対し，$\sin n\theta=\dfrac{1}{n}T_n{}'(\cos\theta)\sin\theta$ がすべての θ に対し成立することを示せ。

(3)　$\cos n\theta=\cos\theta\cos(n-1)\theta-\sin\theta\sin(n-1)\theta$ を用いて，

$$T_n(x)=xT_{n-1}(x)+\frac{1}{n-1}(x^2-1)T_{n-1}{}'(x)\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

が $n\geqq 2$ に対し成立することを示せ。

(4)　$T_3(x)$ および $T_4(x)$ を求めよ。