関数 $f(x)$，$g(x)$ を

$$f(x)=e^x,\quad g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$$

で定める。ただし，e は自然対数の底である。また，

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos^2 x\,dx,\quad I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\sin^2 x\,dx$$

とおく。

(1)　$g(x)=g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ を示せ。

(2)　$I_1=I_2$ を示せ。

(3)　$\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$，$I_1$ の値をそれぞれ求めよ。

(17　静岡大)

(解説)

(1) $g\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=f\left(\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\frac{\pi}{4}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)$

$$=f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=g(x)$$

(2) I_1 において $x=\frac{\pi}{2}-t$ とおくと，$\frac{dx}{dt}=-1$

x	0	$\to$	$\frac{\pi}{2}$
t	$\frac{\pi}{2}$	$\to$	0

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\cos^2 x\,dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^0 g\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot(-1)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)\sin^2 t\,dt=I_2$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(e^{x-\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{\pi}{4}-x}\right)dx\ =\left[e^{x-\frac{\pi}{4}}-e^{\frac{\pi}{4}-x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=2\left(e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}\right)$

$$I_1+I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)(\cos^2 x+\sin^2 x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(x)\,dx$$

(2)から，$I_1=I_2$ とり

$$I_1=e^{\frac{\pi}{4}}-e^{-\frac{\pi}{4}}$$