(1) 関数 $f(x)$ は常に $f(x)=f(-x)$ を満たす．このとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx$ となることを示せ．

(2) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx$ を計算せよ．

(福島大)

解説

(1) $\displaystyle\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx=\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$

ここで，

$$\int_{-a}^{0}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx$$

$x=-t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=-1$

x	$-a\longrightarrow 0$
t	$a\longrightarrow 0$

$$=\int_{a}^{0}\frac{f(-t)}{1+e^{t}}\cdot(-1)dt=\int_{0}^{a}\frac{f(t)}{1+e^{t}}dt=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx$$

より

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx&=\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{x}}dx+\int_{0}^{a}\frac{f(x)}{1+e^{-x}}dx\\&=\int_{0}^{a}\left\{\frac{f(x)}{1+e^{x}}+\frac{f(x)}{1+e^{-x}}\right\}dx\\&=\int_{0}^{a}\left\{\frac{f(x)}{1+e^{x}}+\frac{e^{x}f(x)}{1+e^{x}}\right\}dx\\&=\int_{0}^{a}\frac{(1+e^{x})f(x)}{1+e^{x}}dx=\int_{0}^{a}f(x)dx\end{aligned}$$

(2) $f(x)=x\sin x$ とおくと，$f(-x)=(-x)\sin(-x)=x\sin x=f(x)$ であるから，(1)より

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\sin x}{1+e^{-x}}dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx$$

$$=\Big[-x\cos x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=1$$