高3数学α　数学Ⅲスタ演　17.接線･法線

$\boxed{1}$ [2012 筑波大]

曲線 C：$y=\dfrac{1}{x+2}$ $(x>-2)$ を考える。曲線 C 上の点 $P_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を ℓ_1 とし，ℓ_1 と x 軸との交点を Q_1，点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく。以下同様に，自然数 n $(n\geqq 2)$ に対して，点 P_n における接線を ℓ_n とし，ℓ_n と x 軸との交点を Q_n，点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく。

(1)　ℓ_1 の方程式を求めよ。

(2)　P_n の x 座標を x_n $(n\geqq 1)$ とする。x_{n+1} を x_n を用いて表し，x_n を n を用いて表せ。

(3)　ℓ_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

$\boxed{2}$ [2001 関西大]

a を正の定数とし，曲線 $y=ae^{-\frac{x^2}{2}}$ を C とする．l は原点 O を通る直線で，C との交点を P とするとき，P の x 座標は正であり，また，l は点 P における C の接線と垂直に交わるとする．

(1)　このような直線 l が引けるために a がとりうる値の範囲を求めよ．また，このとき，点 P の座標を a を用いて表せ．

(2)　点 P における C の接線が x 軸と交わる点を Q とする．a が (1) で求めた範囲を動くとき，△POQ の面積の最小値と，そのときの a の値を求めよ．

$\boxed{3}$ [2003 立命館大]

$0<p<q$ とし，曲線 C：$y=\log x$ 上に 2 点 $P(p,\ \log p)$，$Q(q,\ \log q)$ をとる．点 P における曲線 C の法線 (P を通り，曲線 C の P における接線に垂直な直線) の方程式は $y=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である．点 Q における曲線 C の法線を同様に求めると，2 つの法線の交点 R の x 座標は ${}^{イ}\boxed{}$ となる．q が p と異なる値をとりながら p に限りなく近づくとき，点 R の x 座標は ${}^{ウ}\boxed{}$ に，y 座標は ${}^{エ}\boxed{}$ に限りなく近づく．

$\boxed{4}$ [2008 信州大]

曲線 K：$y=\cos 2x$ $\left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と y 軸との交点を P とし，曲線 K 上に点 P と異なる点 $Q(t,\ \cos 2t)$ をとる。線分 PQ の垂直二等分線 ℓ が y 軸と交わる点を R とする。

(1)　点 R の y 座標を t を用いて表せ。

(2)　2 点 P，Q を通り，点 P で曲線 K と共通な接線をもつ円を C とする。点 Q が点 P に限りなく近づくとき，円 C の半径 r はどのような値に近づくか。

$\boxed{5}$ [2014 鹿児島大]

θ を媒介変数として，$\begin{cases} x=\theta-\sin\theta \\ y=1-\cos\theta \end{cases}$ で表される曲線の $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ。

$\boxed{6}$ [2017 関西大]

媒介変数表示 $x=\dfrac{3}{\cos\theta}$，$y=2\tan\theta$ で表された曲線上の点 $(6,\ 2\sqrt{3})$ における接線の方程式は $y={}^{ア}\boxed{}\,x-{}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{7}$ [2004 弘前大]

$k>0$ とする．$f(x)=-(x-a)^2$，$g(x)=\log kx$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点を P とする．この点 P において曲線 $y=f(x)$ の接線と曲線 $y=g(x)$ の接線が直交するとき，a と k の関係式を求めよ．ただし，対数は自然対数とする．

$\boxed{8}$ [2006 工学院大]

曲線 C_1：$y=2\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と曲線 C_2：$y=\cos 2x+k$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が共有点 P で共通の接線 ℓ をもつ。ただし，k は定数であり，点 P の x 座標は正とする。k の値と接線 ℓ の方程式を求めよ。