(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，

$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。

(05　名古屋大)

解説

(1) $I=\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とおく

$x=\pi-t$ とおくと，$\frac{dx}{dt}=-1$

x	$0\to\pi$
t	$\pi\to 0$

$$I=\int_{\pi}^{0}\left(\pi-t-\frac{\pi}{2}\right)f(\pi-t)(-1)dt$$

$$=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(\pi-t)\,dt=\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-t\right)f(t)\,dt=-\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx=-I$$

$\therefore\ I=0$

(2) $J=\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ とおく

$f(x)=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}$ とすると，$f(\pi-x)=\frac{\sin^3(\pi-x)}{4-\cos^2(\pi-x)}=\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}=f(x)$

(1)より

$$J=\int_0^{\pi}xf(x)dx=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$$

$u=\cos x$ とおくと，$\frac{dx}{du}=\frac{1}{\frac{du}{dx}}=-\frac{1}{\sin x}$

x	$0\to\ \pi$
u	$1\to\ -1$

$$J=\frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{\sin^3 x}{4-\cos^2 x}\cdot\left(-\frac{1}{\sin x}\right)du=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1-\cos^2 x}{4-\cos^2 x}du$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{u^2-1}{u^2-4}du=\frac{\pi}{2}\cdot 2\int_0^1\frac{u^2-1}{u^2-4}du=\pi\int_0^1\left(1+\frac{3}{u^2-4}\right)du$$

$$=\pi\int_0^1\left\{1+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}\right)\right\}du$$

$$=\pi\left[u+\frac{3}{4}(\log|u-2|-\log|u+2|)\right]_0^1$$

$$=\pi\left[u+\frac{3}{4}\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\right]_0^1=\pi\left(1-\frac{3}{4}\log 3\right)$$