定積分 $\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+3\cos t)^2dt$ の値を求めると $\boxed{}$ である.

(98　福岡大)

(解説)

$$\int_{-\pi}^{\pi}(2\sin t+3\cos t)^2dt=\int_{-\pi}^{\pi}(4\sin^2 t+12\sin t\cos t+9\cos^2 t)dt$$

ここで, $\sin^2 t, \cos^2 t$ は偶関数であり, $\sin t\cos t$ は奇関数であるから

$$=2\int_0^{\pi}(4\sin^2 t+9\cos^2 t)dt$$

$$=2\int_0^{\pi}\left\{2(1-\cos 2t)+\frac{9(1+\cos 2t)}{2}\right\}dt$$

$$=\int_0^{\pi}(13+5\cos 2t)dt$$

$$=\left[13t+\frac{5\sin 2t}{2}\right]_0^{\pi}=13\pi$$

注

$f(x)=\sin x, g(x)=\cos x$ とすると

　$f(-x)=\sin(-x)=-\sin x=-f(x)$ より, $\sin x$ は奇関数

　$g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x)$ より, $\cos x$ は偶関数です。

また, $F(x)=f(x)g(x)$ とし, $f(x)$ を奇関数, $g(x)$ を奇関数とすると,

　$F(-x)=f(-x)g(-x)=\{-f(x)\}\{-g(x)\}=f(x)g(x)=F(x)$

より, 奇関数×奇関数=偶関数となります。

同様にして,

　偶関数×偶関数=偶関数

　奇関数×偶関数=奇関数

となります。