# 高3数学$\alpha$　数学Ⅲスタ演　22.平均値の定理・速度

$\boxed{1}$ [2014 横浜市立大]

ある開区間 $D$ で与えられた関数 $f(x)$ は，2 階微分可能で，第 2 次導関数 $f''(x)$ は連続で，さらに $f''(x)<0$ と仮定する。

(1)　$a_1<a_2<a_3$ を満たす $D$ の $a_1$，$a_2$，$a_3$ に対して $\dfrac{f(a_2)-f(a_1)}{a_2-a_1}>\dfrac{f(a_3)-f(a_2)}{a_3-a_2}$ を示せ。

(2)　$x_1$，$x_2$ を $D$ の実数とする。$0\leqq\alpha\leqq 1$ を満たす $\alpha$ に対して
$f(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\geqq\alpha f(x_1)+(1-\alpha)f(x_2)$ を示せ。

(3)　$x_1$，$x_2$，$x_3$ を $D$ の実数とする。$\alpha_1\geqq 0$，$\alpha_2\geqq 0$，$\alpha_3\geqq 0$ および $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$ を満たす $\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$ に対して $f(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3)\geqq\alpha_1f(x_1)+\alpha_2f(x_2)+\alpha_3f(x_3)$ を示せ。

(4)　$D=(0,\ \infty)$ とする。上の議論を用いて，$D$ の $x_1$，$x_2$，$x_3$ に対して不等式
$\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3}\geqq\sqrt[3]{x_1x_2x_3}$ を示せ。

$\boxed{2}$ [2006 新潟大]

(1)　$x>0$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log(x+1)-\log x<\frac{1}{x}$$

(2)　$x\geqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$x\log x\geqq(x-1)\log(x+1)$$

(3)　整数 $n(n\geqq 3)$ に対して，不等式 $(n\,!)^2>n^n$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{3}$ [2001 名古屋大]

$e$ を自然対数の底とする．$e\leqq p<q$ のとき，不等式

$$\log(\log q)-\log(\log p)<\frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ．

$\boxed{4}$ [1997 新潟大]

(1)　関数 $f(x)=e^x\sin x$ を微分せよ．

(2)　平均値の定理を利用して，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$|e^{\beta}\sin\beta-e^{\alpha}\sin\alpha|\leqq\sqrt{2}(\beta-\alpha)e^{\beta}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{5}$ [2009 神戸大]

$a$，$b$ は実数で $a>b>0$ とする。区間 $0\leqq x\leqq 1$ で定義される関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\log(ax+b(1-x))-x\log a-(1-x)\log b$$

ただし，log は自然対数を表す。このとき，以下のことを示せ。

(1)　$0<x<1$ に対して $f''(x)<0$ が成り立つ。

(2)　$f'(c)=0$ を満たす実数 $c$ が，$0<c<1$ の範囲にただ 1 つ存在する。

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ を満たす実数 $x$ に対して，$ax+b(1-x)\geqq a^x b^{1-x}$ が成り立つ。

$\boxed{6}$ [2014 慶応義塾大]

$a_1=0$，$a_{n+1}=\log(a_n+e)$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ で定まる数列 $\{a_n\}$ の収束について調べたい。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x=\log(x+e)$ は $x>0$ の範囲でただ 1 つの実数解をもつことを証明せよ。

以下，(1) の実数解を $\beta$ とする。

(2)　すべての自然数 $n$ について $0\leqq a_n<\beta$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$0<a<b$ のとき $\log b-\log a<\dfrac{b-a}{a}$ が成り立つことを証明せよ。

(4)　すべての自然数 $n$ について $\beta-a_{n+1}<\dfrac{1}{e}(\beta-a_n)$ が成り立つことを証明し，これを用いて $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\beta$ を示せ。

$\boxed{7}$ [2012 静岡大]

$a_1$ を $\dfrac{\pi}{12}<a_1<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす数とし，$\{a_n\}$ を $a_{n+1}=1-\sin a_n$ $(n=1，2，3，\cdots\cdots)$ で定められる数列とする。

(1)　直線 $y=1-x$ と曲線 $y=\sin x$ は，$\dfrac{\pi}{12}<x<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲でただ 1 つの交点をもつことを示せ。

(2)　$n$ を自然数とするとき，不等式 $\dfrac{\pi}{12}<a_n<\dfrac{\pi}{4}$ を示せ。

(3)　(1) の交点の $x$ 座標を $\alpha$ とするとき，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\alpha$ が成り立つことを示せ。

$\boxed{8}$［2001 自治医科大］

右図のような底無しの四角錐を逆さまにした容器がある．高さ 4 cm の所で水平断面は 1 辺 3 cm の正方形である．この容器に 9 cm$^3$/s で静かに水を入れるとき，水の深さが 2 cm になる瞬間の水面が上昇する速さは何 cm/s か．