$f(x)$ は微分可能な関数であるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x\cos x$ であるとき，導関数 $f'(x)$ を求め，$f'(x)$ が偶関数であることを示せ。

(2)　$f(x)$ が奇関数であるとき，導関数 $f'(x)$ が偶関数であることを示せ。

(3)　$f(x)$ が奇関数であるとき，定積分 $\int_0^x f(t)\,dt$ が偶関数であることを示せ。

(20　岡山理科大)

解説

(1) $f'(x)=\cos x-x\sin x$

$f'(-x)=\cos(-x)-(-x)\cdot\sin(-x)=\cos x-x\sin x$ であるから

$f'(x)=f'(-x)$ より，$f'(x)$ は偶関数である

(2) $f(x)$ は奇関数より，$f(-x)=-f(x)$　$\therefore\ f(x)=-f(-x)$

このとき

$$\begin{aligned} f'(x)&=\{-f(-x)\}' \\ &=-f'(-x)\cdot(-x)' \\ &=f'(-x) \end{aligned}$$

よって，$f'(x)$ は偶関数である

別解 微分の定義を利用

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ より

$$\begin{aligned} f'(-x)&=\lim_{h\to 0}\frac{f(-x+h)-f(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left\{-\frac{f(x-h)-f(x)}{h}\right\}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{-h} \\ &=f'(x) \end{aligned}$$

よって，$f'(x)$ は偶関数である

(3) $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ とすると

$$F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\,dt$$

$t=-u$ とおくと，$\dfrac{dt}{du}=-1$

t	$0\to\ -x$
u	$0\to x$

$$\begin{aligned} F(-x)&=\int_0^x f(-u)\cdot(-1)\,du \\ &=\int_0^x f(u)\,du=F(x) \end{aligned}$$

（$f(x)$ は奇関数より，$f(-u)=-f(u)$）

よって，$\int_0^x f(t)\,dt$ は偶関数である。