高3数学α　数学Ⅲスタ演　11.漸化式と極限

$\boxed{1}$ [1998 東京理科大]

(1)　$a_1=2,\ 2a_{n+1}=a_n+1\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，

$\lim_{n\to\infty} a_n=$ $^{ア}\boxed{}$, $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k-1)=$ $^{イ}\boxed{}$ である．

(2)　$a_1=1,\ a_2=3,\ 4a_{n+2}=5a_{n+1}-a_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ について，

$\lim_{n\to\infty} a_n=$ $^{ウ}\boxed{}$ である．

$\boxed{2}$ [1998 東京理科大]

数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $\begin{cases} a_1=0 \\ a_n=(3p-1)a_{n-1}-1 \quad (n=2,3,4,\cdots) \end{cases}$ を満たすという．ただし，p は定数である．数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots$ が等差数列になるのは $p=$ $^{ア}\boxed{}$ のときである．

また，この数列が収束するためには，実数 p が $^{イ}\boxed{} < p <$ $^{ウ}\boxed{}$ を満たすことが必要十分であって，このとき $\lim_{n\to\infty} a_n=$ $^{エ}\boxed{}$ となる．

$\boxed{3}$ [1996 信州大]

平面上の点列 $P_n(x_n, y_n)\ (n=1,2,\cdots)$ が $\begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n+\dfrac{4}{5}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{3}{4}x_n+\dfrac{1}{5}y_n \end{cases}$

を満たし，点 P_1 は直線 l： $x+y=2$ 上にあるとする．

(1)　点 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ はすべて直線 l 上にあることを示せ．

(2)　点列 $P_1, P_2, \cdots\cdots$ はある定点に限りなく近づくことを示せ．

高3数学α　数学Ⅲスタ演　11.漸化式と極限

$\boxed{4}$ [2010 津田塾大]

(1)　$\sqrt{2}$ は無理数であることを用いて，$k+l\sqrt{2}=k'+l'\sqrt{2}$ (k，l，k'，l' は整数) であれば，$k=k'$，$l=l'$ であることを示せ。

(2)　自然数 n に対して，$(1+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$ (a_n，b_n は整数) と表せる。このとき，a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ。

(3)　(2) の a_n，b_n に対し，$(1-\sqrt{2})^n=a_n-b_n\sqrt{2}$ であることを，n に関する数学的帰納法によって示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}$ を求めよ。

$\boxed{5}$ [2015 東京工業大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ ($n=1$，2，3，……) で定める。また数列 $\{b_n\}$ を

$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots\cdots+na_n}{1+2+\cdots\cdots+n}$ ($n=1$，2，3，……) と定める。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　すべての n に対して，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。

$\boxed{6}$ [2018 名古屋工業大]

関数 $f(x)=\sqrt{2x+1}$ に対して，数列 $\{a_n\}$ を次で定義する。

$$a_1=3,\ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

方程式 $f(x)=x$ の解を α とおく。

(1)　自然数 n に対して，$a_n>\alpha$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 n に対して，$a_{n+1}-\alpha<\dfrac{1}{2}(a_n-\alpha)$ が成り立つことを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。