(1)　$x=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおいて $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\sin y+\cos y}dy$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$ を求めよ。

(11　愛媛大)

解説

(1) $x=\dfrac{\pi}{2}-y$ とおくと，$\dfrac{dx}{dy}=-1$

x	$0\ \to\ \dfrac{\pi}{2}$
y	$\dfrac{\pi}{2}\ \to\ 0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}\cdot(-1)dy$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos y}{\cos y+\sin y}dy$$

(2) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx$, $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$ とおくと

(1)より，$I=J$ …①

また，

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{\sin x+\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x+\cos x}\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\Big[x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}\ \cdots②$$

①，②より

$I=\dfrac{\pi}{4}$