$f(x)$ を $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続な関数とする．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$ を証明せよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx$ を証明せよ．

(97　小樽商科大)

解説

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx$

$\sin(\pi - x) = \sin x$ であることに注目して，

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx$ において，$x = \pi - t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = -1$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi - t))\cdot(-1)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

よって

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

注 $\sin(\pi - x) = \sin x$ であるから，$y = \sin x$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ に関して対称であり，当たり前の結果である。

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx$

$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx$ において，$x = \pi - t$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt} = -1$ より

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} (\pi - t)f(\sin t)(-dt) = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)\,dt$$

よって

$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xf(\sin x)\,dx + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t)\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} tf(\sin t)\,dt$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx \quad \text{((1)より)}$$