α，β は実数とする。どのような実数 p，q に対しても

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(p\cos x+q\sin x)(x^2+\alpha x+\beta)dx=0$$

となるのは，$\alpha=$ ア $\boxed{}$，$\beta=$ イ $\boxed{}$ のときである。

(06　慶応大)

解説

$I=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(p\cos x+q\sin x)(x^2+\alpha x+\beta)dx$ とおく

$x^2\cos x$，$x\sin x$，$\cos x$ は偶関数，$x^2\sin x$，$x\cos x$，$\sin x$ は奇関数より

$$I=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(px^2\cos x+\beta p\cos x+q\alpha x\sin x)dx$$

ここで，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\cos x\,dx=\Big[x^2\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\frac{\pi^2}{4}-2$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin x\,dx=\Big[x(-\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

より

$$I=2p\left(\frac{\pi^2}{4}+\beta-2\right)+2q\alpha$$

どのような実数 p，q に対しても $I=0$ となるとき

$$\frac{\pi^2}{4}+\beta-2=0,\ 2\alpha=0$$

$$\therefore\ \alpha={}^{ア}0,\ \beta={}^{イ}2-\frac{\pi^2}{4}$$