高3数学α　数学Ⅲスタ演　11.漸化式と極限

$\boxed{1}$ [2007 関西大]

k は実数の定数で $k \neq 0$ とする。$a_1=1$，$ka_n+(2-k)a_{n-1}=1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$ を満たす数列 $\{a_n\}$ は，k の値の範囲が $^{ア}\boxed{}$ であるとき収束し，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = {}^{イ}\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$ [2009 高知女子大]

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+r^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定める数列 $\{a_n\}$ について次の問いに答えよ。ただし，r は $\dfrac{1}{2}$ でない定数である。

(1)　一般項 a_n を r で表せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ が 0 に収束するための r の条件を求めよ。

(3)　(2) で求めた条件で無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は和をもつ。この和を r を用いて表せ。

$\boxed{3}$ [1998 東京農工大]

次のように定義された数列を $\{a_n\}$ とする.

$$a_1=r^2,\ a_2=1,\ 2a_n=(r+3)a_{n-1}-(r+1)a_{n-2}\ (n \geqq 3)$$

(1)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくとき，b_n を n と r を用いて表せ.

(2)　a_n を求めよ.

(3)　数列 $\{a_n\}$ が収束するような r の範囲およびそのときの極限値を求めよ.

$\boxed{4}$ [2015 大阪教育大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ がある。

$a_1=12$，$b_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{3}{4}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n+\dfrac{1}{2}b_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　a_2，b_2，a_3，b_3 をそれぞれ求めよ。

(2)　すべての自然数 n について，$a_n+b_n=12$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

$\boxed{5}$ [2004 芝浦工業大]

平面上の点 $P_n(x_n,\ y_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ において x_n と y_n は次の関係式を満たすとする.

$$x_{n+1}=-\frac{2}{3}x_n+y_n \quad \cdots\cdots ①,\quad y_{n+1}=-\frac{5}{3}x_n+2y_n \quad \cdots\cdots ②$$

ただし，$x_1=1$，$y_1=2$ とする.

(1)　x_n，x_{n+1}，x_{n+2} の間の関係式を求めよ.

(2)　x_n および y_n $(n\geqq 1)$ を求めよ.

(3)　$P_0=\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\left(\lim\limits_{n\to\infty}x_n,\ \lim\limits_{n\to\infty}y_n\right)$ として，点 P_0 の座標を求めよ.

$\boxed{6}$ [2007 東京理科大]

原点を O とする xy 平面上の点 P_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ は，その座標 $(x_n,\ y_n)$ が条件

$$x_1=1,\ y_1=0,\ \begin{cases} x_{n+1}=\dfrac{1}{4}x_n-\dfrac{\sqrt{3}}{4}y_n \\ y_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}x_n+\dfrac{1}{4}y_n \end{cases} \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

を満たしているものとする。このとき，$\left|\overrightarrow{OP_{n+1}}\right|={}^{ア}\boxed{}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|$，

$\overrightarrow{OP_{n+1}}\cdot\overrightarrow{OP_n}={}^{イ}\boxed{}\left|\overrightarrow{OP_n}\right|^2$ である。$\triangle P_nOP_{n+1}$ の面積を S_n とおくと，

$S_n={}^{ウ}\boxed{}$ であり，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}S_n={}^{エ}\boxed{}$ である。

$\boxed{7}$ [2015 東京理科大]

各自然数 n に対し，X_n，Y_n，V_n，W_n を

$$X_n+Y_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^{2n-1},\qquad V_n-W_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^{2n-1}$$

が成り立つような整数とする。$\sqrt{5}$ が無理数であることを証明なしで使ってもよい。

(1)　X_2，Y_2，V_2，W_2 の値を求めよ。

(2)　X_{n+1}，Y_{n+1} をそれぞれ X_n と Y_n の式で表せ。

(3)　V_{n+1}，W_{n+1} をそれぞれ V_n と W_n の式で表せ。

(4)　${X_n}^2-5{Y_n}^2$ を計算せよ。

(5)　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{X_n}{Y_n}$ を計算せよ。

$\boxed{8}$ [2008 茨城大]

次のように定義される数列 $\{a_n\}$ について，極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。発散するときは「発散する」と解答せよ。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\sqrt{2a_n+4}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

$\boxed{9}$ [2008 岡山県立大]

$a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{{a_n}^2+3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について

(1)　$0\leqq a_n<1$ が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2)　$1-a_{n+1}<\dfrac{1-a_n}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

$\boxed{10}$ [2010 徳島大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{3}{a_n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$0<a_2-\sqrt{3}<\dfrac{1}{2}$ を示せ。

(2)　n が 2 以上の自然数であるとき，不等式 $0<a_n-\sqrt{3}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ の極限値を求めよ。

$\boxed{11}$ [2013 神戸大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は $a_1=0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4-{a_n}^2}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ を満たすとする。

(1)　すべての自然数 n に対し，$0\leqq a_n<1$ が成り立つことを示せ。

(2)　3 次方程式 $x^3-4x+1=0$ は，$0<x<1$ においてただ 1 つの解 α をもつことを示せ。

(3)　(2) の α に対し，$|a_{n+1}-\alpha|\leqq\beta|a_n-\alpha|$ $(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ が成り立つような β $(0<\beta<1)$ を 1 つ求めよ。

(4)　(2) の α に対し $\lim_{n\to\infty} a_n=\alpha$ が成り立つことを示せ。