

$x$  の 2 次不等式

$$6x^2 - (16a + 7)x + (2a + 1)(5a + 2) < 0$$

を満たす整数  $x$  が 10 個となるように、正の整数  $a$  の値を定めよ。

(12 東京慈恵会医科大)

解説

$$6x^2 - (16a + 7)x + (2a + 1)(5a + 2) < 0$$

$$\{2x - (2a + 1)\}\{3x - (5a + 2)\} < 0$$

$$\left(x - \frac{2a + 1}{2}\right)\left(x - \frac{5a + 2}{3}\right) < 0$$

$$\frac{5a + 2}{3} - \frac{2a + 1}{2} = \frac{4a + 1}{6} > 0 \quad (a > 0) \text{ であるから } \frac{2a + 1}{2} < \frac{5a + 2}{3} \text{ より}$$

$$\frac{2a + 1}{2} < x < \frac{5a + 2}{3}$$

これを満たす整数  $x$  が 10 個であるためには

$$9 < \frac{5a + 2}{3} - \frac{2a + 1}{2} \leq 11$$

$$54 < 4a + 1 \leq 66 \quad \therefore \frac{53}{4} < a \leq \frac{65}{4}$$

であることが必要

$a$  は整数より、 $a = 14, 15, 16$

$$(i) a = 14 \text{ のとき, } \frac{29}{2} < x < 24$$

これを満たす整数  $x$  は 9 個であるから不適

$$(ii) a = 15 \text{ のとき, } \frac{31}{2} < x < \frac{77}{3}$$

これを満たす整数  $x$  は 10 個

$$(iii) a = 16 \text{ のとき, } \frac{33}{2} < x < \frac{82}{3}$$

これを満たす整数  $x$  は 11 個あるから不適

(i) ~ (iii) より、求める整数  $a$  の値は  $a = 15$

注  $x = \frac{2a + 1}{2}$ ,  $x = \frac{5a + 2}{3}$  をグラフ化して考えてもよいが、大変である。

〔別解〕2次関数のグラフを利用

$$\frac{2a+1}{2} = a + \frac{1}{2} \quad (a \text{ は整数}) \text{ であるから}$$

解に含まれる整数が  $a+1, a+2, \dots, a+10$  であればよいから

$f(x) = 6x^2 - (16a+7)x + (2a+1)(5a+2)$  とおいて,  $y = f(x)$  のグラフを考えて

$$a+10 < \frac{5a+2}{3} \leq a+11$$

$$3a+30 < 5a+2 \leq 3a+33$$

$$14 < a \leq \frac{31}{2}$$

$a$  は整数より,  $a=15$

〔注〕この解法は,  $a$  が整数であつたり,  $a$  の係数が整数であるから有効であることに注意したい。