

x の 2 次不等式

$$6x^2 - (16a+7)x + (2a+1)(5a+2) < 0$$

を満たす整数 x が 10 個となるように、正の整数 a の値を定めよ。

(12 東京慈恵会医科大学)

(解説)

$$6x^2 - (16a+7)x + (2a+1)(5a+2) < 0$$

$$(2x - (2a+1))(3x - (5a+2)) < 0$$

$$\left(x - \frac{2a+1}{2}\right)\left(x - \frac{5a+2}{3}\right) < 0$$

$$\frac{5a+2}{3} - \frac{2a+1}{2} = \frac{4a+1}{6} > 0 \quad (a > 0) \text{ であるから } \frac{2a+1}{2} < \frac{5a+2}{3} \text{ より}$$

$$\frac{2a+1}{2} < x < \frac{5a+2}{3}$$

これを満たす整数 x が 10 個であるためには

$$9 < \frac{5a+2}{3} - \frac{2a+1}{2} \leq 11$$

$$54 < 4a+1 \leq 66 \quad \therefore \frac{53}{4} < a \leq \frac{65}{4}$$

であることが必要

a は整数より、a = 14, 15, 16

(i) a = 14 のとき、 $\frac{29}{2} < x < 24$

これを満たす整数 x は 9 個であるから不適

(ii) a = 15 のとき、 $\frac{31}{2} < x < \frac{77}{3}$

これを満たす整数 x は 10 個

(iii) a = 16 のとき、 $\frac{33}{2} < x < \frac{82}{3}$

これを満たす整数 x は 11 個あるから不適

(i)～(iii)より、求める整数 a の値は a = 15

注  $x = \frac{2a+1}{2}, x = \frac{5a+2}{3}$  をグラフ化して考えてもよいが、大変である。

【別解】2次関数のグラフを利用

$$\frac{2a+1}{2} = a + \frac{1}{2} \quad (a \text{ は整数}) \text{ であるから}$$

解に含まれる整数が  $a+1, a+2, \dots, a+10$  であればよいから

$f(x) = 6x^2 - (16a+7)x + (2a+1)(5a+2)$  において、 $y=f(x)$  のグラフを考えて

$$a+10 < \frac{5a+2}{3} \leq a+11$$

$$3a+30 < 5a+2 \leq 3a+33$$

$$14 < a \leq \frac{31}{2}$$

$a$  は整数より、 $a=15$

【注】この解法は、 $a$  が整数であったり、 $a$  の係数が整数であるから有効であることに注意したい。