2 次不等式 $2x^2+(4-7a)x+a(3a-2)<0$ の解がちょうど 3 個の整数を含むとき，正の定数 a の値の範囲を求めよ。

(06　中京大)

解説

$2x^2+(4-7a)x+a(3a-2)<0$

$(2x-a)\{x-(3a-2)\}<0$

$\dfrac{a}{2}>3a-2$ すなわち $0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき，$3a-2<x<\dfrac{a}{2}$

$\dfrac{a}{2}=3a-2$ すなわち $a=\dfrac{4}{5}$ のとき，解なし

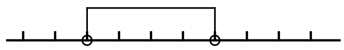
$\dfrac{a}{2}<3a-2$ すなわち $a>\dfrac{4}{5}$ のとき，$\dfrac{a}{2}<x<3a-2$

$0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき，$\dfrac{a}{2}-(3a-2)=2-\dfrac{5}{2}a<2$ より

解がちょうど 3 個の整数を含むことはない

$a>\dfrac{4}{5}$ のとき，解がちょうど 3 個の整数を含むには

$2<(3a-2)-\dfrac{a}{2}<4$



$4<\dfrac{5}{2}a<6$　$\therefore\ \dfrac{8}{5}<a<\dfrac{12}{5}$

であることが必要

(i) $\dfrac{8}{5}<a<2$ のとき

$\dfrac{4}{5}<\dfrac{a}{2}<1$ であるから，$3<3a-2\leqq 4$　$\therefore\ \dfrac{5}{3}<a<2$

(ii) $2\leqq a<\dfrac{12}{5}$ のとき

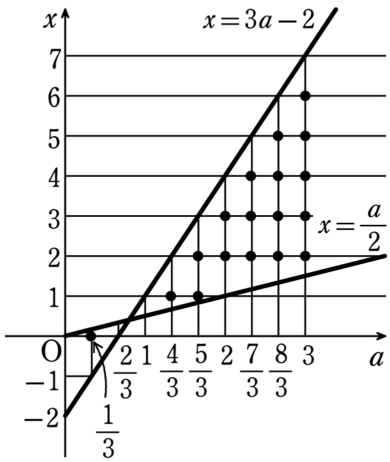
$1\leqq\dfrac{a}{2}<\dfrac{6}{5}$ であるから，$4<3a-2\leqq 5$　$\therefore\ 2<a\leqq\dfrac{7}{3}$

(i)，(ii)より

$\dfrac{5}{3}<a<2$，$2<a\leqq\dfrac{7}{3}$

$\boxed{\text{別解}}$ グラフを利用

$a>0$ における，$x=\dfrac{a}{2}$，$x=3a-2$ のグラフは右図のようになる



求める条件は，グラフより

$$\frac{5}{3}<a<2,\ 2<a\leqq\frac{7}{3}$$