

不等式 $x^2 - (a + a^2)x + a^3 < 0$ (ただし, a は正の整数) を満たす x の値のうち, 整数が 50 個以上存在するような a の値の最小値を求めよ.

(98 星薬科大)

(解説)

$$x^2 - (a + a^2)x + a^3 < 0$$

$$(x - a)(x - a^2) < 0$$

$a^2 - a = a(a - 1) \geq 0$ ($a \geq 1$) であるから $a \leq a^2$ より

$a = 1$ のとき, 解なし

$a > 1$ のとき, $a < x < a^2$

これを満たす整数 x は $a + 1, \dots, a^2 - 1$ であるから,

これが 50 個以上存在するとき

$$(a^2 - 1) - a \geq 50$$

$$a^2 - a - 51 \geq 0$$

$$a \geq 1 \text{ より, } a \geq \frac{1 + \sqrt{205}}{2}$$

$$14^2 = 196 < 205 < 15^2 = 225 \text{ であるから, } 7.5 < \frac{1 + \sqrt{205}}{2} < 8 \text{ より}$$

a の最小値は 8