a を 1 より大きい定数とする．2 次不等式 $x^2-(3a+1)x+2a^2+2a \leqq 0$ について

(1)　この不等式を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2)　この不等式を満たす整数 x がただ 1 つ存在するように，a の値の範囲を定めよ．

(99　岡山理科大)

解説

(1) $x^2-(3a+1)x+2a^2+2a=x^2-(3a+1)x+2a(a+1)$

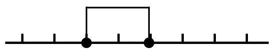
$=(x-2a)\{x-(a+1)\}$ より，与えられた不等式は

$(x-2a)\{x-(a+1)\} \leqq 0$

$2a-(a+1)=a-1>0\ (a>1)$ から $2a>a-1$ より

$a+1 \leqq x \leqq 2a$

(2) この不等式を満たす整数 x がただ 1 つ存在するとき



$0 \leqq 2a-(a+1)<2$

$a>1$ より，$1<a<3$

であることが必要 (必要条件で a の範囲を絞る)

(i) $1<a \leqq 2$ のとき

$2<a+1 \leqq 3$ であるから，$3 \leqq 2a<4$　$\therefore \dfrac{3}{2} \leqq a<2$

(ii) $2<a<3$ のとき

$3<a+1<4$ であるから，$4 \leqq 2a<5$　$\therefore 2<a<\dfrac{5}{2}$

(i)，(ii)より

$\dfrac{3}{2} \leqq a<2,\ 2<a<\dfrac{5}{2}$

別解 グラフを利用

図のように縦軸を x 軸，横軸を a 軸として

$x=a+1, x=2a$ という関数を考える。

このとき，$x=k$ が $a=k$ であるときの

上の 2次不等式の解を表す数直線である。

(横の数直線を縦にしただけ)

グラフより，条件を満たす a の範囲は

$\dfrac{3}{2} \leqq a<2,\ 2<a<\dfrac{5}{2}$