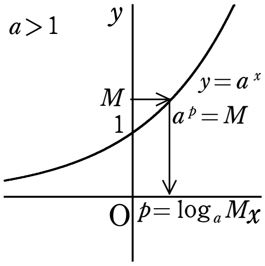
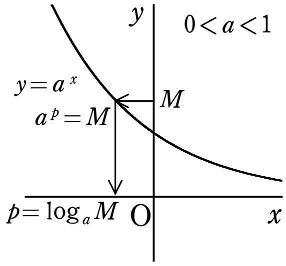
2.4　対数





(1) **対数**

$a>0, a\neq 1$ とするとき，指数関数 $y=a^x$ のグラフからわかるように，任意の正の数 M に対して，$a^p=M$ となる実数 p がただ1つ定まります。

この p を a を**底**とする M の**対数**といい，$\log_a M$ と書きます。

また，M をこの関数の**真数**といいます。

対数の真数は正の数です。

対数
$a^p=M \Leftrightarrow p=\log_a M$
ただし，$a>0, a\neq 1, M>0$

例1
(1) x の方程式 $4^x-2^{x+3}+15=0$ を解け.
(2) 方程式 $4^x+4^{-x}-10(2^x+2^{-x})+18=0$ を解け.
(3) 不等式 $3^{x+1}\leqq 11+4\times 3^{-x}$ を解け。
(4) a を1より大きい定数とする。方程式 $a^x+a^{-x}=3$ を満たす正の解 x を求めよ。
(5) a を正の定数とする。不等式 $a^{2x}+6a^{-x}>7$ を解け。

解説

(1) $4^x-2^{x+3}+15=0$

$(2^x)^2-8\cdot 2^x+15=0$

$(2^x-3)(2^x-5)=0 \quad \therefore\ 2^x=3, 5 \quad \therefore\ x=\log_2 3, \log_2 5$

注 $x^2=2$ を考えるとき，これを満たす x は循環しない無限小数となり，これをうまく表現する術がないので，$\sqrt{2}$ という記号を導入しました。log も同様で，$2^x=3$ を考えるとき，これを満たす x は循環しない無限小数となります。そこで，$\sqrt{\ }$ のときと同様に，$\log_2 3$ という記号を導入します。

(2) $4^x+4^{-x}-10(2^x+2^{-x})+18=0$

$2^x+2^{-x}=t$ とおくと，　$t=2^x+2^{-x}\geqq 2\sqrt{2^x2^{-x}}=2$ (等号成立は $x=0$)

$t^2=4^x+4^{-x}+2$　　$\therefore\ 4^x+4^{-x}=t^2-2$

このとき

$(t^2-2)-10t+18=0$

$t^2-10t+16=0$

$(t-2)(t-8)=0$　　$\therefore\ t=2, 8$

$t=2$ のとき，　$x=0$

$t=8$ のとき

$2^x+2^{-x}=8$

$(2^x)^2-8\cdot 2^x+1=0$　　$\therefore\ 2^x=4\pm\sqrt{15}$　　$x=\log_2(4\pm\sqrt{15})$

よって，　$x=0, \log_2(4\pm\sqrt{15})$

(3) $3^{x+1}\leqq 11+4\times 3^{-x}$

両辺 $3^x>0$ をかけて

$3^{2x+1}\leqq 11\cdot 3^x+4$

$3\cdot(3^x)^2-11\cdot 3^x-4\leqq 0$

$3^x=t$ とおくと，　$t>0$

$3t^2-11t-4\leqq 0$

$(3t+1)(t-4)\leqq 0$

$t>0$ より，　$0<t\leqq 4$　　$\therefore\ 0<3^x\leqq 4$

底 $3>1$ より，　$x\leqq\log_3 4$

(4) $a^x+a^{-x}=3$

$(a^x)^2+1=3a^x$

$(a^x)^2-3a^x+1=0$

$a^x=t$ とおくと，　$a>1$，$x>0$ より $t>1$

$t^2-3t+1=0$

$t>1$ より，　$t=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　$\therefore\ a^x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$　　$\therefore\ x=\log_a\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

(5) $a^{2x}+6a^{-x}>7$

両辺 $a^x>0$ をかけて

$a^{3x}-7\cdot a^x+6>0$

$(a^x-1)(a^{2x}+a^x-6)>0$

$(a^x-1)(a^x+3)(a^x-2)>0$

$a^x+3>0$ より

$(a^x-1)(a^x-2)>0$

$a^x>0$ より

$0<a^x<1, a^x>2$

$0<a<1$ のとき， $x>0, x<\log_a 2$

$a=1$ のとき，左辺$=0$ より，解なし

$a>1$ のとき， $x<0, x>\log_a 2$

例2

(1) $x=\log_2 3$ であるとき，$2^x=$ ${}^{ア}\boxed{}$， $4^x+4^{-x}=\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}^{ウ}\boxed{}}$ である。

(2) $x=\log_2(1+\sqrt{3})$ のとき，4^x-2^{x+2} の値を求めよ。

(解説)

(1) $x=\log_2 3$ より， $2^x={}^{ア}3$

$4^x+4^{-x}=(2^x)^2+\dfrac{1}{(2^x)^2}=9+\dfrac{1}{9}=\dfrac{{}^{イ}82}{{}^{ウ}9}$

(2) $x=\log_2(1+\sqrt{3})$ より， $2^x=1+\sqrt{3}$

$4^x-2^{x+2}=(2^x)^2-4\cdot 2^x$

$=(1+\sqrt{3})^2-4(1+\sqrt{3})$

$=4+2\sqrt{3}-4-4\sqrt{3}=-2\sqrt{3}$

例3

(1) $\log_9 3$，$\log_{\frac{1}{7}} 49$，$3^{2\log_3 2}$ の値を求めよ.

(2) 方程式 $\log_{81} x=-\dfrac{1}{4}$ を解け。

(3) $\log_x 5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$ のとき，x の値を求めよ.

(4) $\log_x(4x-3)=2$ の解は $x=$ ${}^{ア}\boxed{}$ である.

(解説)

(1) $k=\log_9 3$ とおくと， $9^k=3$　$3^{2k}=3$　$\therefore 2k=1$　$\therefore k=\dfrac{1}{2}$

$l=\log_{\frac{1}{7}} 49$ とおくと， $\left(\dfrac{1}{7}\right)^l=49$　$7^{-l}=7^2$　$\therefore -l=2$　$\therefore l=-2$

$3^{2\log_3 2}=\left(3^{\log_3 2}\right)^2=2^2=4$

(2) $\log_{81} x=-\dfrac{1}{4}$

真数条件より， $x>0$

$81^{-\frac{1}{4}}=x$　$\therefore x=\dfrac{1}{\sqrt[4]{3^4}}=\dfrac{1}{3}$

(3) $\log_x 5\sqrt{5}=\dfrac{1}{2}$

底の条件より， $x>0, x\fallingdotseq 1$

$x^{\frac{1}{2}}=5\sqrt{5}$　$\therefore x=125$

(4) $\log_x(4x-3)=2$

真数条件，底の条件より， $x>\dfrac{3}{4}, x\fallingdotseq 1$ …①

$x^2=4x-3$

$x^2-4x+3=0$

$(x-1)(x-3)=0$

①より， $x=3$

定義から，$a^p=M$ …① のとき， $p=\log_a M$ …② より

②を①に代入して， $a^{\log_a M}=M$ が成り立ちます。

例4

$2^{\log_2 3}$ の値を求めよ。

$8^{-\log_2 5}=\boxed{}$

$2^{\log_8 27}=\boxed{}$ である。

$\left(\dfrac{1}{27}\right)^{4\log_3\sqrt{2}}$ を簡単にせよ。

解説

(1) $2^{\log_2 3}=3$

(2) $8^{-\log_2 5}=(2^3)^{-\log_2 5}=\left(2^{\log_2 5}\right)^{-3}=5^{-3}=\dfrac{1}{125}$

(3) $2^{\log_8 27}=\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{\log_8 27}=\left(8^{\log_8 27}\right)^{\frac{1}{3}}=27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^3}=3$

(4) $\left(\dfrac{1}{27}\right)^{4\log_3\sqrt{2}}=(3^{-3})^{4\log_3\sqrt{2}}=\left(3^{\log_3\sqrt{2}}\right)^{-12}=(\sqrt{2})^{-12}=\dfrac{1}{64}$

(2) 対数の性質

a を底とする対数の性質を調べてみます。まず，

$a^1=a,\ a^0=1,\ a^{-1}=\dfrac{1}{a}$

より，次のことが成り立ちます。

$\log_a a=1,\ \log_a 1=0,\ \log_a\dfrac{1}{a}=-1$

また，指数法則と対数の定義より，対数について次の性質が導かれます。

対数の性質
$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ のとき
1. $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
2. $\log_a\dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
3. $\log_a M^k=k\log_a M$（k は実数）

1. $\log_a M=p,\ \log_a N=q$ とおくと

$a^p=M,\ a^q=N$

このとき

$MN=a^pa^q=a^{p+q}$

$\therefore\ \log_a MN=p+q=\log_a M+\log_a N$

2 も同様

3. $\log_a M=p$ とおくと，　$a^p=M$

$M^k=(a^p)^k=a^{kp}$

$\therefore\ \log_a M^k=kp=k\log_a M$

例5

(1) $\log_3\dfrac{27}{35}+\log_3 105$ を計算せよ。

(2) $\log_3 4-\log_3 36=^{ア}\boxed{}$ である.

(3) $\log_3 6+\log_3 12-3\log_3 2$ の値を求めよ.

(4) $\log_3\dfrac{27}{32}+2\log_3\dfrac{2}{9}-\log_3\dfrac{3}{8}$ を計算せよ。

(5) $\log_2 12^2+\dfrac{2}{3}\log_2\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}\log_2 3=\dfrac{^{ア}\boxed{}}{_{イ}\boxed{}}$ である。

解説

(1) $\log_3\dfrac{27}{35}+\log_3 105=\log_3\dfrac{27\times105}{35}=\log_3 81=\log_3 3^4=4$

(2) $\log_3 4-\log_3 36=\log_3\dfrac{4}{36}=\log_3\dfrac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$

(3) $\log_3 6+\log_3 12-3\log_3 2=\log_3\dfrac{6\cdot12}{2^3}=\log_3 3^2=2$

(4) $\log_3\dfrac{27}{32}+2\log_3\dfrac{2}{9}-\log_3\dfrac{3}{8}=\log_3\dfrac{27}{32}+\log_3\left(\dfrac{2}{9}\right)^2-\log_3\dfrac{3}{8}$

$$=\log_3\left(\frac{27}{32}\times\left(\frac{2}{9}\right)^2\div\frac{3}{8}\right)$$

$$=\log_3\frac{1}{9}=\log_3 3^{-2}=-2$$

別解

$\log_3\dfrac{27}{32}+2\log_3\dfrac{2}{9}-\log_3\dfrac{3}{8}$

$=\log_3\dfrac{3^3}{2^5}+2\log_3\dfrac{2}{3^2}-\log_3\dfrac{3}{2^3}$

$=(3-5\log_3 2)+2(\log_3 2-2)-(1-3\log_3 2)=-2$

(5) $\log_2 12^2+\dfrac{2}{3}\log_2\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}\log_2 3$

$=2\log_2 2^2\cdot3+\dfrac{2}{3}\log_2\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3}\log_2 3$

$=2(2+\log_2 3)+\dfrac{2}{3}(1-\log_2 3)-\dfrac{4}{3}\log_2 3=\dfrac{14}{3}$

(3) **底の変換公式**

$\log_a b=p$ のとき，$a^p=b$ より

$c>0,\ c\neq 1$ として，c を底とする対数をとると，

$\log_c a^p=\log_c b$

$p\log_c a=\log_c b$

$a\neq 1$ から $\log_c a\neq 0$ より

$$p=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

となり，次の公式が得られます。これを**底の変換公式**といいます。

底の変換公式

$a, b, c>0,\ a, b, c\neq 0$ のとき

4. $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$　　特に，$\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$

例6

(1)　$\log_4 8$ と $\log_{32}256$ の値を求めよ。

(2)　a と b を正の実数，n を実数とする。ただし，$a\neq 1$，$n\neq 0$ とする。$A=a^n$，$B=b^n$ とおくとき，等式 $\log_A B=\log_a b$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $1.5<\log_2 3<1.6$ が成り立つことを示せ。

(解説)

(1) $\log_4 8=\dfrac{\log_2 8}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2}=\dfrac{3}{2}$

$\log_{32}256=\dfrac{\log_2 256}{\log_2 32}=\dfrac{\log_2 2^8}{\log_2 2^5}=\dfrac{8}{5}$

(2) $\log_A B=\log_{a^n} b^n=n\log_{a^n} b=n\dfrac{\log_a b}{\log_a a^n}=n\dfrac{\log_a b}{n}=\log_a b$

(3) (2)より，$\log_2 3=\log_{2^2} 3^2=\log_4 9$

底 $4>1$ より，$\log_4 8<\log_4 9$　　$\therefore 1.5<\log_2 3$ ((1)より)

(2) より，$\log_2 3=\log_{2^5} 3^5=\log_{32} 243$

底 $32>1$ より，$\log_{32} 243<\log_{32} 256$　　$\therefore \log_2 3<1.6$ ((1)より)

例7

(1) x, y, z は0でない実数とする。$2^x=3^y=6^z$ のとき，等式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{z}$ が成り立つことを示せ。

(2) 0でない実数 a, b, c, d が $3^a=5^b=7^c=105^d$ を満たすとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{d}$ が成り立つことを示せ。

解説

(1) $2^x=3^y=6^z=k$ とおくと，　$k>0, k\neq 1$

$x=\log_2 k, y=\log_3 k, z=\log_6 k$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\log_k 2+\log_k 3=\log_k 6=\frac{1}{z}$$

(2) $3^a=5^b=7^c=105^d=k$ とおくと，　$k>0, k\neq 1$

$a=\log_3 k, b=\log_5 k, c=\log_7 k, d=\log_{105} k$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\log_k 3+\log_k 5+\log_k 7$$

$$=\log_k 105=\frac{1}{d}$$

例8

(1) $a=\log_6 2$ とおくとき，$\log_3 6$ を a で表せ。

(2) $\log_{10}2=a, \log_{10}3=b$ とおくとき，$\log_{18}\sqrt[3]{24}$ を a, b を用いて表せ.

(3) $\log_2 3=a$，$\log_3 5=b$ のとき，$\log_2 10$ と $\log_{15}40$ を a，b で表せ.

解説

(1) $$\log_3 6=\frac{\log_6 6}{\log_6 3}=\frac{1}{\log_6\frac{6}{2}}=\frac{1}{1-\log_6 2}=\frac{1}{1-a}$$

(2) $$\log_{18}\sqrt[3]{24}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\log_{10}24}{\log_{10}18}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\log_{10}2^3\cdot 3}{\log_{10}2\cdot 3^2}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\log_{10}2+\log_{10}3}{\log_{10}2+2\log_{10}3}=\frac{3a+b}{3(a+2b)}$$

(3) $\log_3 5=\dfrac{\log_2 5}{\log_2 3}$ より，　$\log_2 5=ab$

$\log_2 10 = \log_2 2 + \log_2 5 = 1 + ab$

$$\log_{15} 40 = \frac{\log_2 40}{\log_2 15} = \frac{\log_2 2^3 \cdot 5}{\log_2 3 \cdot 5} = \frac{3 + \log_2 5}{\log_2 3 + \log_2 5} = \frac{3 + ab}{a(1 + b)}$$

例9

(1) $\log_8 9 \times \log_3 16 = \dfrac{^{ア}\boxed{}}{_{イ}\boxed{}}$

(2) 等式 $\log_2 3 \cdot \log_5 8 \cdot \log_9 25 = \boxed{}$ が成り立つ。

(3) $(\log_8 27)(\log_9 4 + \log_3 16)$ を簡単にせよ。

(4) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4)$ を簡単にせよ.

(解説)

(1) $\log_8 9 \times \log_3 16 = \dfrac{\log_2 9}{\log_2 8} \times \dfrac{\log_2 16}{\log_2 3} = \dfrac{2\log_2 3}{3} \times \dfrac{4}{\log_2 3} = \dfrac{^{ア}8}{^{イ}3}$

別解

$\log_8 9 \times \log_3 16 = \log_8 9 \times \dfrac{\log_8 16}{\log_8 3} = 2\log_8 3 \times \dfrac{1 + \log_8 2}{\log_8 3} = 2 \cdot \left(1 + \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{8}{3}$

としてもできるが，底はなるべく小さくした方が計算しやすい。

(2) $\log_2 3 \cdot \log_5 8 \cdot \log_9 25 = \log_2 3 \cdot \dfrac{\log_2 8}{\log_2 5} \cdot \dfrac{\log_2 25}{\log_2 9}$

$$= \log_2 3 \cdot \frac{3}{\log_2 5} \cdot \frac{2\log_2 5}{2\log_2 3} = 3$$

(3) $(\log_8 27)(\log_9 4 + \log_3 16) = \dfrac{\log_2 27}{\log_2 8}\left(\dfrac{\log_2 4}{\log_2 9} + \dfrac{\log_2 16}{\log_2 3}\right)$

$$= \frac{3\log_2 3}{3}\left(\frac{2}{2\log_2 3} + \frac{4}{\log_2 3}\right)$$

$$= (\log_2 3)\left(\frac{5}{\log_2 3}\right) = 5$$

(4) $(\log_2 9 + \log_8 3)(\log_3 16 + \log_9 4) = \left(\log_2 9 + \dfrac{\log_2 3}{\log_2 8}\right)\left(\dfrac{\log_2 16}{\log_2 3} + \dfrac{\log_2 4}{\log_2 9}\right)$

$$= \left(2\log_2 3 + \frac{\log_2 3}{3}\right)\left(\frac{4}{\log_2 3} + \frac{2}{2\log_2 3}\right)$$

$$= \left(\frac{7}{3}\log_2 3\right)\left(\frac{5}{\log_2 3}\right) = \frac{35}{3}$$

例10

(1) $\log_2 \sqrt[3]{12} - \log_4 6 + \log_8 \sqrt{\dfrac{3}{2}} = \boxed{}$ である。

(2) $4\log_3 \sqrt{10} + \log_{\frac{1}{3}} 25 + \log_3 \dfrac{9}{4} = \boxed{}$

(3) $\dfrac{1}{3}\log_3 125 + \log_{\sqrt{3}} 4 - \log_9 64$ を簡単にせよ.

解説

(1) 与式$=\log_2 \sqrt[3]{12} - \dfrac{\log_2 6}{\log_2 4} + \dfrac{\log_2 \sqrt{\dfrac{3}{2}}}{\log_2 8}$

$=\log_2 \sqrt[3]{12} - \dfrac{1}{2}\log_2 6 + \dfrac{1}{3}\log_2 \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$=\dfrac{1}{3}\log_2 12 - \dfrac{1}{2}\log_2 6 + \dfrac{1}{6}\log_2 \dfrac{3}{2}$

$=\dfrac{1}{3}(2+\log_2 3) - \dfrac{1}{2}(1+\log_2 3) + \dfrac{1}{6}(\log_2 3 - 1) = 0$

(2) $4\log_3 \sqrt{10} + \log_{\frac{1}{3}} 25 + \log_3 \dfrac{9}{4} = \log_3 (\sqrt{10})^4 + \dfrac{\log_3 25}{\log_3 \dfrac{1}{3}} + \log_3 \dfrac{9}{4}$

$=\log_3 100 - \log_3 25 + \log_3 \dfrac{9}{4}$

$=\log_3 \dfrac{100 \cdot \dfrac{9}{4}}{25} = \log_3 9 = 2$

(4) 与式$=\dfrac{1}{3}\log_3 5^3 + \dfrac{\log_3 4}{\log_3 \sqrt{3}} - \dfrac{\log_3 64}{\log_3 9}$

$=\log_3 5 + \dfrac{2\log_3 2}{\dfrac{1}{2}} - \dfrac{6\log_3 2}{2}$

$=\log_3 5 + 4\log_3 2 - 3\log_3 2$

$=\log_3 5 + \log_3 2$

$=\log_3 10$

例11

$a>0$，$a \neq 1$ とするとき，

$\dfrac{1}{2}\log_a \dfrac{y^5}{x^2}+\log_{\sqrt{a}}\dfrac{x^3y}{a^2}-\log_{\frac{1}{a}}\sqrt{\dfrac{x^2}{y^3}}=$ ${}^{ア}\boxed{}\log_a x+{}^{イ}\boxed{}\log_a y-{}^{ウ}\boxed{}$

である.

(解説)

$$与式=\frac{1}{2}\log_a \frac{y^5}{x^2}+\frac{\log_a \dfrac{x^3y}{a^2}}{\log_a \sqrt{a}}-\frac{\log_a \sqrt{\dfrac{x^2}{y^3}}}{\log_a \dfrac{1}{a}}$$

$$=\frac{1}{2}\log_a \frac{y^5}{x^2}+2\log_a \frac{x^3y}{a^2}+\frac{1}{2}\log_a \frac{x^2}{y^3}$$

$$=\frac{1}{2}(5\log_a y-2\log_a x)+2(3\log_a x+\log_a y-2)+\frac{1}{2}(2\log_a x-3\log_a y)$$

$$=6\log_a x+3\log_a y-4$$

例12

$1<b<a$ とする。$\log_a b+\log_b a=5$ のとき，$\log_a b^2+\log_b a^2$，$(\log_a b)^2+(\log_b a)^2$，$\log_a b-\log_b a$ の値を求めよ。

(解説)

$$\log_a b^2+\log_b a^2=2\log_a b+2\log_b a$$
$$=2(\log_a b+\log_b a)=2\cdot 5=10$$

$$(\log_a b)^2+(\log_b a)^2=(\log_a b+\log_b a)^2-2(\log_a b)(\log_b a)$$
$$=(\log_a b+\log_b a)^2-2=5^2-2=23$$

$$(\log_a b-\log_b a)^2=(\log_a b+\log_b a)^2-4(\log_a b)(\log_b a)$$
$$=(\log_a b+\log_b a)^2-4=5^2-4=21$$

ここで $\log_a b-\log_b a=\log_a b-\dfrac{1}{\log_a b}=\dfrac{(\log_a b)^2-1}{\log_a b}<0$ より

（$1<b<a$ より $0<\log_a b<1$）

$$\log_a b-\log_b a=-\sqrt{21}$$

例13

x の 2 次方程式 $3x^2-10x+b=0$ の 2 つの異なる解が $\log_3 a$ と $\log_a 3$ (ただし，$a>0$，$a\neq1$) であるとき，$a=$ ア$\boxed{}$ または イ$\boxed{}$ (ア$\boxed{}$ < イ$\boxed{}$)，$b=$ ウ$\boxed{}$ である。

(解説)

解と係数の関係より

$$\log_3 a+\log_a 3=\frac{10}{3} \cdots①$$

$$(\log_3 a)(\log_a 3)=\frac{b}{3} \cdots②$$

①より

$$\log_3 a+\frac{1}{\log_3 a}=\frac{10}{3}$$

$$3(\log_3 a)^2-10\log_3 a+3=0$$

$$(3\log_3 a-1)(\log_3 a-3)=0 \quad \therefore \log_3 a=\frac{1}{3},\ 3 \quad \therefore a={}^{ア}\sqrt[3]{3},\ {}^{イ}27$$

②より

$$b=3(\log_3 a)(\log_a 3)=3(\log_3 a)\left(\frac{1}{\log_3 a}\right)={}^{ウ}3$$

例14

(1)　$2^m=3^n$ を満たす自然数 m，n は存在しないことを示せ。

(2)　$\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(解説)

(1) $2^m=3^n$ を満たす自然数 m, n が存在すると仮定すると

3^n は 3 を素因数に含むが， 2^m は 3 を素因数に含まないので

$2^m=3^n$ は不合理

よって，題意は示された

別解

m, n が自然数のとき，2^m は偶数，3^n は奇数であるから

2^m と 3^n が等しくなることはない

よって，$2^m=3^n$ を満たす自然数 m, n は存在しない

(2) $\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，

$\log_2 3 > 0$ より， $\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ (m, n は自然数) とおける

このとき

$$2^{\frac{m}{n}} = 3$$

両辺を n 乗して

$$2^m = 3^n$$

これは，(1) で証明したことに矛盾する

よって，$\log_2 3$ は無理数である

確認問題1

対数表を用いないで，$\log_2 3$ の値を小数第 2 位以下を切り捨てて，小数第 1 位まで求めよ．

(解説)

$2^3 < 3^2$，底$2 > 1$ より

$\log_2 2^3 < \log_2 3^2$

$3 < 2\log_2 3 \quad \therefore 1.5 < \log_2 3$

$2^8 > 3^5$，底$2 > 1$ より

$\log_2 2^8 > \log_2 3^5$

$8 > 5\log_2 3 \quad \therefore \log_2 3 < 1.6$

よって，$\log_2 3$ の値を小数第 1 位まで求めると 1.5

注 2 と 3 の累乗でなるべく近い数で不等式を作り評価する。

確認問題2
正の実数 a，b $(a \fallingdotseq 1,\ b \fallingdotseq 1,\ ab \fallingdotseq 1)$ に対し，$A=\log_2 a$，$B=\log_2 b$ とおく。
(1) $\log_{ab}2$ を A，B で表せ。
(2) a，b が $\log_a 2+\log_b 2=1$，$\log_{ab}2=-1$，$a>1$ を満たすとき，A，B を求めよ。
(3) (2) の a，b に対し，$a^x=b$ を満たす実数 x を求めよ。

(解説)

(1) $\log_{ab}2=\dfrac{\log_2 2}{\log_2 ab}=\dfrac{1}{\log_2 a+\log_2 b}=\dfrac{1}{A+B}$

(2) $\log_a 2+\log_b 2=\dfrac{1}{\log_2 a}+\dfrac{1}{\log_2 b}=\dfrac{1}{A}+\dfrac{1}{B}=\dfrac{A+B}{AB}$ より

$$\frac{A+B}{AB}=1 \quad \therefore A+B=AB \cdots ①$$

$\log_{ab}2=-1$ より

$$\frac{1}{A+B}=-1 \quad \therefore A+B=-1$$

①より，$AB=-1$
よって，A，B は2次方程式 $t^2+t-1=0$ の2解であり，
$a>1$ から，$A=\log_2 a>0$ より

$$A=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ B=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

(3) $a^x=b$ より

$$x=\log_a b=\frac{\log_2 b}{\log_2 a}=\frac{B}{A}=\frac{-1-\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=-\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=-\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

確認問題3

$3^x=a$，$12^y=a$，$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=2$ を満たす実数 x，y が存在するような a の値を求めよ。

(解説)

$3^x=a$ より，　$x=\log_3 a=\dfrac{1}{\log_a 3}$　　$\therefore \dfrac{1}{x}=\log_a 3$

同様にして，　$\dfrac{1}{y}=\log_a 12$

よって

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2$$

$$\log_a 3+\log_a 12=2$$

$$\log_a 36=2 \quad \therefore a=6$$

確認問題4

x，y，z は1と異なる正の数で，条件 $\log_y z+\log_z x+\log_x y=\dfrac{7}{2}$，$\log_z y+\log_x z+\log_y x=\dfrac{7}{2}$，$xyz=2^{10}$，$x\leqq y\leqq z$ を満たしている．x，y，z を求めよ．

(解説)

$\log_y z=a$, $\log_z x=b$, $\log_x y=c$ とおくと

$$a+b+c=\frac{7}{2} \cdots ①$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{7}{2} \cdots ②$$

$$abc=\log_y z\cdot\log_z x\cdot\log_x y=\frac{\log_x z}{\log_x y}\cdot\frac{1}{\log_x z}\cdot\log_x y=1 \cdots ③$$

②より

$$\frac{bc+ca+ab}{abc}=\frac{7}{2} \quad \therefore ab+bc+ca=\frac{7}{2}\ (③より)$$

よって，　a, b, c は

$$t^3-(a+b+c)t^2+(ab+bc+ca)t-abc=0$$

$$t^3-\frac{7}{2}t^2+\frac{7}{2}t-1=0 \quad \therefore 2t^3-7t^2+7t-2=0$$

の 3 つの解である

$$(t-1)(2t^2-5t+2)=0$$

$$(t-1)(t-2)(2t-1)=0$$

$x \leqq y \leqq z$ であるから， $b<1<a, c$ より

$$(a, b, c)=\left(1, \frac{1}{2}, 2\right), \left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

$(a, b, c)=\left(1, \frac{1}{2}, 2\right)$のとき

$$\log_y z=1, \log_z x=\frac{1}{2}, \log_x y=2$$

$$\therefore z=y, x=z^{\frac{1}{2}}, y=x^2$$

$xyz=2^{10}$ より

$$x \cdot x^2 \cdot x^2=2^{10} \qquad x^5=2^{10} \qquad \therefore x=4 \qquad \therefore (x, y, z)=(4, 16, 16)$$

$(a, b, c)=\left(2, \frac{1}{2}, 1\right)$ のとき

$$\log_y z=2, \log_z x=\frac{1}{2}, \log_x y=1$$

$$\therefore z=y^2, x=z^{\frac{1}{2}}, y=x$$

$xyz=2^{10}$ より

$$x \cdot x \cdot x^2=2^{10} \qquad x^4=2^{10} \qquad \therefore x=4\sqrt{2} \qquad \therefore (x, y, z)=(4\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 32)$$

確認問題5

a，b は自然数で a は偶数，b は 3 以上の奇数とする。$\log_a b$ は無理数であることを示せ。

解説

$\log_a b>0$ より $\log_a b=\frac{p}{q}$ (p と qは自然数) とすると

$\log_a b=\frac{p}{q}$ より

$$a^{\frac{p}{q}}=b$$

$$a^p=b^q$$

左辺は偶数であり，右辺は奇数であるから矛盾

よって，$\log_a b$ は無理数である