第2章　指数関数・対数関数

2.1　指数の拡張

(1) 0 や負の整数の指数

　a を n 個かけ合わせたものを a の n 乗といい，a^n と表します。ただし，$a^1=1$ とします。$a^1, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots$ をまとめて a の**累乗**といい，a^n における n を累乗の**指数**といいます。

　m, n を正の整数とするとき，次の指数法則が成り立ちます。

　1. $a^m a^n = a^{m+n}$　　2. $(a^m)^n = a^{mn}$　　3. $(ab)^n = a^n b^n$ …①

　以下，m, n を正の整数から整数，有理数，実数と拡張していくことを考えます。

　$a \neq 0$ とする。このとき，指数が 0 や負の整数の場合にもこの指数法則が成り立つように，a の累乗の意味を定めます。

①が整数の指数について成り立つとすれば

　$a^m a^0 = a^{m+0} = a^m$ より，$a^0 = 1$

　$a^m a^{-m} = a^{m+(-m)} = a^0 = 1$ より，$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$

より，0 や負の整数を指数にもつ累乗を次のように定めます。

$a \neq 0, n$ は正の整数のとき $a^0 = 1, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

すなわち，$a^0 = 1, a^{-1} = \dfrac{1}{a}, a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}, \cdots, a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

　0 や負の整数を指数にもつ累乗をこのように定義すると，$a, b \neq 0$ のとき，①は，m, n が整数のときも成り立ちます。例えば，
$m=5, n=-2$ のとき，

　1. $a^5 a^{-2} = a^5 \times \dfrac{1}{a^2} = a^3 = a^{5+(-2)}$

　2. $(a^5)^{-2} = \dfrac{1}{(a^5)^2} = \dfrac{1}{a^{5\times 2}} = a^{-(5\times 2)} = a^{5\times(-2)}$

3. $(ab)^{-2}=\dfrac{1}{(ab)^2}=\dfrac{1}{a^2b^2}=\dfrac{1}{a^2}\times\dfrac{1}{b^2}=a^{-2}b^{-2}$

1～3の系として

1’. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^m\times\dfrac{1}{a^n}=a^m a^{-n}=a^{m-n}$

3’. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=(ab^{-1})^n=a^n(b^{-1})^n=a^n b^{-n}=\dfrac{a^n}{b^n}$

指数法則

$a, b \fallingdotseq 0$，　m, n は整数のとき

1. $a^m a^n=a^{m+n}$　　2. $(a^m)^n=a^{mn}$　　3. $(ab)^n=a^n b^n$

1’. $\dfrac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$　　3’ $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

例1

(1) $\dfrac{\sqrt{7^{634}}}{7^{109}\times 49^{104}}$ の値は $\boxed{}$ である。

(2) $\dfrac{\sqrt{2^3}\times 2^2\times(2^2\times 3^2)^3}{6^5\times 4^2}\div\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{2^3}$ を計算せよ。

(3) x，yを整数とするとき，次の式を満たす整数 a，b を x，yを用いて表せ。

$$\frac{4^x\times 6^{x+y}\times 12^{x-y}}{16^x\times 9^{2x-3y}}=2^a\times 3^b$$

(4) $\dfrac{a^{-x-y}-a^{-y}}{(1-a^x)a^{y-x}}\times a^{2y+1}$ を簡単にせよ。

解説

(1) 与式$=\dfrac{\sqrt{(7^{317})^2}}{7^{109}\times(7^2)^{104}}=\dfrac{7^{317}}{7^{109+2\cdot 104}}=\dfrac{7^{317}}{7^{317}}=1$

(2) 与式 $=\dfrac{2\sqrt{2}\times 2^2\times 2^6\times 3^6}{2^5\times 3^5\times 2^4}\times\dfrac{2^3}{2\sqrt{2}}=2^{2+6+3-5-4}\times 3^{6-5}=2^2\times 3=12$

(3) $\dfrac{4^x\times 6^{x+y}\times 12^{x-y}}{16^x\times 9^{2x-3y}}=\dfrac{(2^2)^x\times(2\cdot 3)^{x+y}\times(2^2\cdot 3)^{x-y}}{(2^4)^x\times(3^2)^{2x-3y}}$

$$=\frac{2^{2x}\times 2^{x+y}\times 3^{x+y}\times 2^{2x-2y}\times 3^{x-y}}{2^{4x}\times 3^{4x-6y}}$$

$$=2^{2x+(x+y)+(2x-2y)-4x}\times 3^{(x+y)+(x-y)-(4x-6y)}$$
$$=2^{x-y}\times 3^{-2x+6y}$$

よって

$$2^{x-y}\times 3^{-2x+6y}=2^a\times 3^b$$
$$2^{x-y-a}=3^{2x-6y+b}$$

2 と 3 は互いに素で $x-y-a$ と $2x-6y+b$ はともに整数より

$x-y-a\neq 0$ とすると，これを満たす $2x-6y+b$ は存在しないから

$$x-y-a=0 \qquad \therefore a=x-y$$

このとき，$1=3^{2x-6y+b}$ より

$$2x-6y+b=0 \qquad \therefore b=-2x+6y$$

(4) 与式 $=\dfrac{(a^{-x}-1)a^{-y}}{(1-a^x)a^{-x}a^y}\times a^{2y+1}=\dfrac{(a^{-x}-1)a^{-y}}{(a^{-x}-1)a^y}\times a^{2y+1}=a^{-y-y+(2y+1)}$

$$=a$$

(2) **累乗根**

n を正の整数とするとき，n 乗すると a になる数，すなわち $x^n=a$ となる数 x を a の n **乗根**といいます。例えば，

$2^4=16, (-2)^4=16$ であるから，$2, -2$ は 16 の 4 乗根

$(-3)^3=-27$ であるから，-3 は -27 の 3 乗根

です。2 乗根，3 乗根，… をまとめて**累乗根**といいます。

(ⅰ) n が正の奇数のとき

実数 a に対して，$x^n=a$ を満たす x がただ 1 つ定まります。

これを $\sqrt[n]{a}$ と表します。

(ⅱ) n が正の偶数のとき

(ア) $a>0$ のとき

$x^n=a$ を満たす x は正のものと負のものの 2 つ存在します。

正のものを $\sqrt[n]{a}$ ，負のものを $-\sqrt[n]{a}$ と表します。

注 $\sqrt[2]{a}$ は $\sqrt{a}$ を意味します。

(イ) $a=0$ のとき

$x^n=0$ をみたす x は 0 のみです

(ウ) $a<0$ のとき

$x^n\geqq 0$ より，$x^n=a$ を満たす x は実数の範囲では存在しません。

$a>0$ のとき，$\sqrt[n]{a}>0$ より，次の性質が成り立ちます。

累乗根の性質

$a>0, b>0$ で，m, n, p が正の整数のとき

1. $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$　2. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　3. $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$

4. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　5. $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$

1. $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$

$\sqrt[n]{a}>0$ であるから $(\sqrt[n]{a})^m>0$ より

　$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$

2. $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$

$\sqrt[n]{a}>0$ であるから $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$ より

　$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

3. $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{\sqrt[p]{(a^m)^p}}=\sqrt[n]{a^m}$

4. $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$

$\sqrt[n]{a}>0, \sqrt[n]{b}>0$ であるから $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$ より

　$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$

5. 同様

例2

$\sqrt[3]{\sqrt{729}}$ を簡単にせよ。

(解説)

$\sqrt[3]{\sqrt{729}}=\sqrt[6]{3^6}=3$

例3

(1) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-16}$ を計算せよ。

(2) $\dfrac{5}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-81}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}$ を簡単にせよ。

(解説)

(1) $\sqrt[3]{54}+\sqrt[3]{-250}-\sqrt[3]{-16}=\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{250}+\sqrt[3]{16}$

$$=\sqrt[3]{3^3\cdot 2}-\sqrt[3]{5^3\cdot 2}+\sqrt[3]{2^3\cdot 2}$$

$$=3\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{2}$$

$$=(3-5+2)\sqrt[3]{2}=0$$

(2) $\dfrac{5}{3}\sqrt[6]{9}+\sqrt[3]{-81}+\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{5}{3}\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3^3\cdot 3}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{3^2}}$

$$=\frac{5}{3}\sqrt[3]{3}-3\sqrt[3]{3}+\frac{\sqrt[3]{3}}{3}=-\sqrt[3]{3}$$

例4

a は自然数とする。a が 2 つの不等式 $\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{a}$，$\sqrt[6]{(a^3)^4\times a^2\div a^5}<24\sqrt{3}$ を満たすとき，a の値は $\boxed{}$ である。

(解説)

$\sqrt[3]{3}<\sqrt[6]{a}$ より

$\sqrt[6]{3^2}<\sqrt[6]{a}$　　$\therefore\ 9<a$ …①

$\sqrt[6]{(a^3)^4\times a^2\div a^5}<24\sqrt{3}$ より

$\sqrt[6]{a^{12+2-5}}<24\sqrt{3}$

$\sqrt[6]{a^9}<24\sqrt{3}$

$\sqrt{a^3}<\sqrt{2^6\cdot 3^3}$　　$\therefore\ a<2^2\cdot 3=12$ …②

①，② を同時に満たす自然数 a は，$a=10,\ 11$

(3) 有理数の指数

ここまでで，$a, b\neq 0$, m, n が整数とするとき，指数法則

1. $a^m a^n=a^{m+n}$　2. $(a^m)^n=a^{mn}$　3. $(ab)^n=a^n b^n$ …②

が成り立つところまで拡張しました。ここでは，指数が有理数の場合にもこの指数法則が成り立つように，正の数 a の累乗の意味を定めます。②が整数の指数について成り立つとすれば

$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^{\frac{m}{n}\times n}=a^m$ より，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

$a^{-\frac{m}{n}}a^{\frac{m}{n}}=a^{-\frac{m}{n}+\frac{m}{n}}=a^0=1$ より，$a^{-\frac{m}{n}}=\dfrac{1}{a^{\frac{m}{n}}}$

より，有理数を指数にもつ累乗を次のように定めます。

$a>0$， m, n は正の整数， r が正の有理数のとき

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\ a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

有理数を指数にもつ累乗をこのように定義すると， $a, b>0$ のとき②は，指数が有理数のときもそのまま成り立ちます。

指数法則

$a, b>0$， r, s は有理数のとき

1. $a^r a^s=a^{r+s}$　2. $(a^r)^s=a^{rs}$　3. $(ab)^r=a^r b^r$

1'. $\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　3' $\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

$a>0, b>0$，例えば $r=\dfrac{2}{5}, s=\dfrac{1}{2}$ のとき，

1. $a^{\frac{2}{5}}a^{\frac{1}{2}}=\sqrt[5]{a^2}\sqrt{a}=\sqrt[10]{a^4}\sqrt[10]{a^5}=\sqrt[10]{a^9}=a^{\frac{9}{10}}=a^{\frac{2}{5}+\frac{1}{2}}$

2. $\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\sqrt[5]{a^2}}=\sqrt[10]{a^2}=\sqrt[5]{a}=a^{\frac{1}{5}}=a^{\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}}$

3. $(ab)^{\frac{2}{5}}=\sqrt[5]{(ab)^2}=\sqrt[5]{a^2b^2}=\sqrt[5]{a^2}\sqrt[5]{b^2}=a^{\frac{2}{5}}b^{\frac{2}{5}}$

例5

$\left(\dfrac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}$ を簡単にせよ。

解説

$$\left(\frac{125}{64}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left\{\left(\frac{5}{4}\right)^3\right\}^{-\frac{2}{3}}=\left(\frac{5}{4}\right)^{-2}=\frac{16}{25}$$

例6

(1) $8^{\frac{4}{9}} \div 3^{-\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}} = \boxed{}$ である.

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt{8}$ を 2^x の形に表すとき，xの値を求めよ.

(3) $\sqrt{2} \div \sqrt[4]{4} \times \sqrt[12]{32} \div \sqrt[6]{2} = 2^a$ のとき，a の値を求めよ。

(4) $\sqrt[3]{243} \times \sqrt{18} \div \sqrt[3]{16}$ を $2^x 3^y$ の形に表すとき，x, yの値を求めよ.

(5) a を正の定数とする。$\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a} \div \sqrt{a}$ を簡単にせよ。

(6) $\sqrt[3]{x^2 y} \times \sqrt{x^3 y} \div \sqrt[6]{xy^{-1}}$ を計算せよ。

解説

(1) $8^{\frac{4}{9}} \div 3^{-\frac{1}{3}} \times 6^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{4}{9}} \times 3^{\frac{1}{3}} \times (2\times 3)^{\frac{2}{3}}$

$= 2^{\frac{4}{3}+\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = 2^2 \times 3 = 12$

(2) $\sqrt[4]{2} \times \sqrt[3]{16} \times \sqrt{8} = 2^{\frac{1}{4}} \times 2^{\frac{4}{3}} \times 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{1}{4}+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}} = 2^{\frac{37}{12}}$

よって，　$x = \dfrac{37}{12}$

(3) 与式$= 2^{\frac{1}{2}} \div 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{5}{12}} \div 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{5}{12}-\frac{1}{6}} = 2^{\frac{1}{4}}$

よって，　$a = \dfrac{1}{4}$

(4) $\sqrt[3]{243} \times \sqrt{18} \div \sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{3^5} \times 3\sqrt{2} \div \sqrt[3]{2^4} = 3^{\frac{5}{3}} \times 3^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \times 2^{-\frac{4}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{2}-\frac{4}{3}} 3^{\frac{5}{3}+1} = 2^{-\frac{5}{6}} 3^{\frac{8}{3}}$

よって，　$x = -\dfrac{5}{6}$，$y = \dfrac{8}{3}$

(5) $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[6]{a} \div \sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \times a^{\frac{1}{6}} \div a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3}+\frac{1}{6}-\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$

(6) $\sqrt[3]{x^2 y} \times \sqrt{x^3 y} \div \sqrt[6]{xy^{-1}} = (x^2 y)^{\frac{1}{3}} \times (x^3 y)^{\frac{1}{2}} \div (xy^{-1})^{\frac{1}{6}}$

$= x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} \times x^{\frac{3}{2}} y^{\frac{1}{2}} \div x^{\frac{1}{6}} y^{-\frac{1}{6}}$

$= x^{\frac{2}{3}+\frac{3}{2}-\frac{1}{6}} y^{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{6}\right)} = x^2 y$

例7

(1) 有理数 m，n が $(\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{27})(\sqrt[4]{243}-8\sqrt[4]{3})=m+n\sqrt{3}$ を満たす。

このとき，$m=$ ア $\boxed{\quad\quad}$，$n=$ イ $\boxed{\quad\quad}$ である。

(2) $(\sqrt[6]{a}+\sqrt[6]{b})(\sqrt[6]{a}-\sqrt[6]{b})(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2})$ を簡単に表すと $\boxed{\quad\quad}$ である.

解説

(1)
$$\begin{aligned}(\sqrt[4]{48}-\sqrt[4]{27})(\sqrt[4]{243}-8\sqrt[4]{3}) &=(2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3^3})(3\sqrt[4]{3}-8\sqrt[4]{3})\\ &=-5\sqrt[4]{3}(2\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{3^3})\\ &=-10\sqrt[4]{3^2}+15\\ &=15-10\sqrt{3}\end{aligned}$$

m, n は有理数より

$m=$ ア 15，$n=$ イ -10

(2) 与式
$$\begin{aligned}&=(\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b})\{(\sqrt[3]{a})^2+\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}+(\sqrt{b})^2\}\\ &=(\sqrt[3]{a})^3-(\sqrt[3]{b})^3=a-b\end{aligned}$$

例8

(1) $a^{2x}=5$ のとき，$\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$，$\dfrac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}$ の値を求めよ。

(2) $9^x=2$ のとき，$\dfrac{27^x-27^{-x}}{3^x-3^{-x}}$ の値を求めよ。

解説

(1)
$$\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^x-a^{-x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x}=\frac{a^{2x}-1}{a^{2x}+1}=\frac{5-1}{5+1}=\frac{2}{3}$$

$$\begin{aligned}\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}&=\frac{(a^x+a^{-x})(a^{2x}-a^x\cdot a^{-x}+a^{-2x})}{a^x+a^{-x}}\\ &=a^{2x}-1+\frac{1}{a^{2x}}=5-1+\frac{1}{5}=\frac{21}{5}\end{aligned}$$

別解

$$\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x+a^{-x}}=\frac{(a^{3x}+a^{-3x})a^x}{(a^x+a^{-x})a^x}=\frac{a^{4x}+a^{-2x}}{a^{2x}+1}=\frac{1}{6}\cdot\left(25+\frac{1}{5}\right)=\frac{21}{5}$$

(2) $\dfrac{27^x-27^{-x}}{3^x-3^{-x}}=\dfrac{(3^x)^3-(3^{-x})^3}{3^x-3^{-x}}$

$=\dfrac{(3^x-3^{-x})\{(3^x)^2+3^x\cdot 3^{-x}+(3^{-x})^2\}}{3^x-3^{-x}}$

$=9^x+1+9^{-x}$

$=2+1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{7}{2}$

例9 (1) 実数 x が等式 $2^x-2^{-x}=3$ を満たすとき 4^x+4^{-x} と 2^x+2^{-x} の値を求めよ. (2) $x>1$ で $x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}=3$ のとき，$x+x^{-1}$，$x-x^{-1}$ の値を求めよ。 (3) 実数 x が $4^x+4^{-x}=7$ を満たすとき，8^x+8^{-x} の値を求めよ。

解説

(1) $2^x-2^{-x}=3$

両辺を 2 乗して

$4^x-2+4^{-x}=9 \quad \therefore 4^x+4^{-x}=11$

$(2^x+2^{-x})^2=4^x+2+4^{-x}=13$

$2^x+2^{-x}>0$ より， $2^x+2^{-x}=\sqrt{13}$

(2) $x+x^{-1}=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2+\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2=\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-2=3^2-2=7$

$(x-x^{-1})^2=(x+x^{-2})^2-4=7^2-4=45$

$x>1$ から $x>x^{-1}$ より， $x-x^{-1}>0$

よって， $x-x^{-1}=3\sqrt{5}$

(3) $(2^x+2^{-x})^2=4^x+4^{-x}+2=7+2=9$

$2^x+2^{-x}>0$ より， $2^x+2^{-x}=3$

$8^x+8^{-x}=(2^x)^3+(2^{-x})^3$

$=(2^x+2^{-x})^3-3\cdot 2^x\cdot 2^{-x}\cdot(2^x+2^{-x})$

$=3^3-3\cdot 3=18$

例10

(1) 4 つの数 $2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$4^{\frac{1}{4}}$，$5^{\frac{1}{5}}$ のうちで，最大のものと最小のものを求めよ。

(2) 4，$\sqrt[3]{3^4}$，$2^{\sqrt{3}}$，$3^{\sqrt{2}}$ の大小を比べ，小さい順に並べよ。

解説

(1) $4^{\frac{1}{4}}=(2^2)^{\frac{1}{4}}=2^{\frac{1}{2}}$ より，$2^{\frac{1}{2}}$，$3^{\frac{1}{3}}$，$5^{\frac{1}{5}}$ の大小を比較する

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6=2^3=8$，　$\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6=3^2=9$

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^6<\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^6$ より，$2^{\frac{1}{2}}<3^{\frac{1}{3}}$

$\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}=2^5=32$，　$\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}=5^2=25$

$\left(5^{\frac{1}{5}}\right)^{10}<\left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{10}$ より，$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}$

よって，$5^{\frac{1}{5}}<2^{\frac{1}{2}}=4^{\frac{1}{4}}<3^{\frac{1}{3}}$

したがって，最大のものは $3^{\frac{1}{3}}$，最小のものは $5^{\frac{1}{5}}$

(2) $(\sqrt[3]{3^4})^3=81, 4^3=64$ より，$\sqrt[3]{3^4}>4$

$4=2^2>2^{\sqrt{3}}$ （$2>\sqrt{3}$）より，$4>2^{\sqrt{3}}$

$\sqrt[3]{3^4}=3^{\frac{4}{3}}<3^{\sqrt{2}}$ （$\frac{4}{3}<\sqrt{2}$）より，$\sqrt[3]{3^4}<3^{\sqrt{2}}$

よって，4 つの数を小さい順に並べると

　$2^{\sqrt{3}}$，4，$\sqrt[3]{3^4}$，$3^{\sqrt{2}}$

(4) 無理数の指数

　指数が無理数のときも累乗の指数を定めることができます。例えば，$\sqrt{2}=1.4142\cdots$ に対して，累乗の列 $a^1, a^{1.4}, a^{1.41}, a^{1.414}, a^{1.4142}, \cdots$ $(a>0)$ は次第に一定の値に近づいていきます(これを収束といいます)。その一定の値を $a^{\sqrt{2}}$ と定めます。このようにして，$a>0$ のとき，実数 x に対して a^x の値を定められます。このように定めると，指数を有理数まで拡張した指数法則は指数が実数のときもそのまま成り立ちます。

確認問題1

(1)　64^{95} と 65^{90} の大小を比較せよ。

(2)　63^{100} と 64^{95} の大小を比較せよ。

解説

(1) $64^{95}=(2^6)^{95}=(2^{19})^{30}$，$65^{90}=(65^3)^{30}$ より

2^{19} と 65^3 の大小を比較すればよい

$$
\begin{aligned}
65^3&=(64+1)^3=(2^6+1)^3\\
&=2^{18}+3\cdot2^{12}+3\cdot2^6+1\\
&<2^{18}+2^{14}+2^8+2\\
&<2^{18}+2^{14}+2^9\quad(2^n=2\cdot2^{n-1}\text{ より})\\
&<2^{18}+2^{15}<2^{19}
\end{aligned}
$$

よって

$$64^{95}>65^{90}$$

(2) $63^{100}=(63^{10})^{10}$，$64^{95}=(2^{57})^{10}$ より

63^{10} と 2^{57} の大小を比較すればよい

$$
\begin{aligned}
63^{10}&=(64-1)^{10}=(2^6-1)^{10}\\
&=2^{60}+{}_{10}C_2\cdot2^{48}+{}_{10}C_4\cdot2^{36}+{}_{10}C_6\cdot2^{24}+{}_{10}C_8\cdot2^{12}+{}_{10}C_{10}\cdot1\\
&\quad-({}_{10}C_1\cdot2^{54}+{}_{10}C_3\cdot2^{42}+{}_{10}C_5\cdot2^{30}+{}_{10}C_7\cdot2^{18}+{}_{10}C_9\cdot2^6)
\end{aligned}
$$

ここで

$${}_{10}C_1\cdot2^{54}+{}_{10}C_3\cdot2^{42}+{}_{10}C_5\cdot2^{30}+{}_{10}C_7\cdot2^{18}+{}_{10}C_9\cdot2^6$$

${}_{10}C_1<2^4$, ${}_{10}C_k<{}_{10}C_0+\cdots+{}_{10}C_{10}=2^{10}$ ($k=0, 1, 2, \cdots, 10$)より

$$
\begin{aligned}
&<2^{58}+2^{52}+2^{40}+2^{28}+2^{16}\\
&<2^{58}+2^{52}+2^{40}+2^{29}\\
&<2^{58}+2^{52}+2^{41}\\
&<2^{58}+2^{53}<2^{59}\text{ より}
\end{aligned}
$$

$$63^{10}>2^{59}>2^{57}$$

よって

$$63^{100}>64^{95}$$

確認問題2

(1)　n を自然数とする。2^n が 4 桁の数になるときの n を求めよ。

(2)　5^{130} は何桁の数か。

解説

(1) $2^9=512$, $2^{10}=1024$, $2^{11}=2048$, $2^{12}=4096$, $2^{13}=8192$, $2^{14}=16384$ より

2^n が 4 桁になるときの n の値は，　$n=10$，11，12，13

(2) $5^{130}=\left(\frac{10}{2}\right)^{130}=\frac{10^{130}}{2^{130}}$

(1)より

$$2^{130}=(2^{10})^{13}=(1024)^{13}>(10^3)^{13}=10^{39}$$

$$2^{130}=(2^{13})^{10}=(8192)^{10}<(10^4)^{10}=10^{40}$$

よって，　$10^{39}<2^{120}<10^{40}$ より，

$$2^{130}=a\times 10^{39}\ (1<a<10)$$

とおける

このとき

$$5^{130}=\frac{10^{130}}{2^{130}}=\frac{10^{130}}{a\times 10^{39}}=\frac{10}{a}\times 10^{90}\left(1<\frac{10}{a}<10\right)$$

より，　5^{30} は 91 桁の数である

別解 5^{130} の常用対数をとると

$$\log_{10}5^{130}=130\log_{10}5$$

$\log_{10}5=\log_{10}\frac{10}{2}=1-\log_{10}2$ より

$$\log_{10}5^{130}=130(1-\log_{10}2)$$

(1)から $10^3<2^{10}$，$2^{13}<10^4$ より，常用対数をとると

$$3<10\log_{10}2\ ,\ 13\log_{10}2<4\qquad \therefore\ \frac{3}{10}<\log_{10}2<\frac{4}{13}$$

よって

$$90<130(1-\log_{10}2)<91$$

$$90<\log_{10}5^{130}<91\qquad \therefore\ 10^{90}<5^{130}<10^{91}$$

したがって，5^{130} は 91 桁の数である

確認問題3

$x^3-2=(x+3)q(x)+r$ を満たす多項式 $q(x)$ と有理数 r を求めよ．これを用いて，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+3}$ を $a(\sqrt[3]{2})^2+b(\sqrt[3]{2})+c$ の形に表せ．ただし，a，b，c は有理数とする．

(解説)

$p(x)=x^3-2$ とおくと，

$r=p(-3)=-29$

このとき，

$x^3+27=(x+3)q(x)$

$x^3+27=(x+3)(x^2-3x+9)$ より

$q(x)=x^2-3x+9$

$x^3-2=(x+3)(x^2-3x+9)-29$ に $x=\sqrt[3]{2}$ を代入そて

$0=(\sqrt[3]{2}+3)\{(\sqrt[3]{2})^2-3(\sqrt[3]{2})+9\}-29$

$\therefore \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}+3}=\dfrac{1}{29}(\sqrt[3]{2})^2-\dfrac{3}{29}(\sqrt[3]{2})+\dfrac{9}{29}$

確認問題4

$x=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ のとき，$x^3-3x=\boxed{}$ である．

(解説)

$a=\sqrt[3]{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\,,\, b=\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ とすると $ab=1$

$x^3=(a+b)^3=a^3+3a+3b+b^3$ より

$x^3-3x=a^3+3a+3b+b^3-3(a+b)=a^3+b^3=2\sqrt{3}$

確認問題5

$A=\left(2^{\frac{4}{3}}\times 2^{-1}\right)^{6}\times\left\{\left(\dfrac{16}{81}\right)^{-\frac{5}{6}}\right\}^{\frac{3}{5}}$　と

$B=(\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{2}-\sqrt[6]{3})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9})$ を計算すると，

$A=$ ${}^{ア}\boxed{}$， $B=$ ${}^{イ}\boxed{}$ となる。

(解説)

$$A=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{6}\times\left(\frac{16}{81}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{2}\times\left(\frac{81}{16}\right)^{\frac{1}{2}}=4\times\frac{9}{4}={}^{ア}9$$

$$B=\{(\sqrt[3]{2})^{2}-(\sqrt[6]{3})^{2}\}(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{12}+\sqrt[3]{9})$$
$$=(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3})\{(\sqrt[3]{4})^{2}+\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{3}+(\sqrt[3]{3})^{2}\}$$
$$=(\sqrt[3]{4})^{3}-(\sqrt[3]{3})^{3}=4-3={}^{イ}1$$

確認問題6

p は $2^{p}=3$ を満たす実数とする。

(1)　p は無理数であり，$\dfrac{3}{2}<p<\dfrac{8}{5}$ であることを示せ。

(2)　次の 2 式を満たす x，y を p を用いて表せ。

$$2^{x+y-2}=9^{y-1},\quad 2^{2x-1}=3^{3x-y+1}$$

(3)　a，b を有理数とする。次の 2 式を満たす有理数 x，y が存在するように a，b を求めよ。

$$2^{x+y-2}=9^{y-a},\quad 2^{2x-b}=3^{3x-y+1}$$

(解説)

(1) $p>1$ であるから，　$p=\dfrac{m}{n}$ (m, n は自然数)と仮定すると

$$2^{\frac{m}{n}}=3\qquad\therefore 2^{m}=3^{n}$$

この等式の左辺は偶数であるが，右辺は奇数であり矛盾

よって，p は無理数である

$\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{2}=8<9=3^{2}$ より

$$2^{\frac{3}{2}}<3=2^{p}\qquad\therefore\frac{3}{2}<p\ (底2>1)$$

$\left(2^{\frac{8}{5}}\right)^5=256>243=3^5$ より

$2^{\frac{8}{5}}>3=2^p \quad \therefore \dfrac{8}{5}>p$ (底$2>1$)

よって，$\dfrac{3}{2}<p<\dfrac{8}{5}$

(2) $2^{x+y-2}=3^{2(y-1)}$，$2^{2x-1}=3^{3x-y+1}$

$2^p=3$ より

$2^{x+y-2}=2^{p\cdot 2(y-1)}$，$2^{2x-1}=2^{p(3x-y+1)}$

$x+y-2=2p(y-1)$，$2x-1=p(3x-y+1)$

$x-(2p-1)y=-2p+2$ …①，$(3p-2)x-py=-p-1$ …②

①×$(3p-2)$－② より

$(-6p^2+8p-2)y=-6p^2+11p-3$

$2(3p-1)(p-1)y=(3p-1)(2p-3)$

(1)から，p は無理数，すなわち $2(3p-1)(p-1)\neq 0$ より

$$y=\frac{2p-3}{2(p-1)}$$

①より，$x=-\dfrac{1}{2(p-1)}$

(3) $2^{x+y-2}=9^{y-a}$，$2^{2x-b}=3^{3x-y+1}$ を満たす有理数 x，y が存在するとする

$2^{x+y-2}=3^{2(y-a)}$，$2^{2x-b}=3^{3x-y+1}$，

$2^p=3$ より

$2^{x+y-2}=2^{p\cdot 2(y-a)}$，$2^{2x-b}=2^{p(3x-y+1)}$

$x+y-2=2p(y-a)$，$2x-b=p(3x-y+1)$

$(-x-y+2)+2(y-a)p=0$，$(-2x+b)+(3x-y+1)p=0$

(1) から，p は無理数であり，

$-x-y+2$，$2(y-a)$，$-2x+b$，$3x-y+1$ は有理数であるから

$-x-y+2=0$，$2(y-a)=0$，$-2x+b=0$，$3x-y+1=0$

$x+y=2$ …③，$a=y$ …④，$b=2x$ …⑤，$3x-y=-1$ …⑥

③，⑥より，$x=\dfrac{1}{4}$，$y=\dfrac{7}{4}$

④，⑤より，$a=\dfrac{7}{4}$，$b=\dfrac{1}{2}$