1.8　積和・和積公式

(1) 積和公式

　加法定理を利用すると，正弦と余弦の積を，和や差に変形することができる次の公式が得られます。これらの公式も暗記をするのではなく，導き方を理解することが大切です。

積和公式

1. $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2. $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3. $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4. $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

1. $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ …①
$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ …②
①+②より，

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$$

$$\therefore\ \sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

2は，①−②より得られます。

3. $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ …③
$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ …④
③+④より，

$$2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$$

$$\therefore\ \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

4は，①−②より得られます。

例1

(1) 次の値をそれぞれ求めよ．

$$2\sin 75^\circ \cos 15^\circ$$

(2) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$ の値を求めよ．

(3) $\dfrac{1}{(\cos 20^\circ)\cdot(\cos 40^\circ)\cdot(\cos 80^\circ)}$ の値を求めよ。

(解説)

(1) $2\sin 75^\circ \cos 15^\circ = \sin(75^\circ + 15^\circ) + \sin(75^\circ - 15^\circ)$

$= \sin 90^\circ + \sin 60^\circ$

$= \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{2}\{\cos(50^\circ + 10^\circ) - \cos(50^\circ - 10^\circ)\}\cdot \sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2} - \cos 40^\circ\right)\cdot \sin 70^\circ$

$= -\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\sin 70^\circ \cos 40^\circ$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\{\sin(70^\circ + 40^\circ) + \sin(70^\circ - 40^\circ)\}$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{4}\sin 110^\circ + \dfrac{1}{4}\sin 30^\circ$

$= -\dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{4}\sin 70^\circ + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$

(3) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$

$= \dfrac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 20^\circ)\cos 80^\circ$

$= \dfrac{1}{4}\cos 80^\circ + \dfrac{1}{2}\cos 20^\circ \cos 80^\circ$

$= \dfrac{1}{4}\cos 80^\circ + \dfrac{1}{4}(\cos 100^\circ + \cos 60^\circ)$

$= \dfrac{1}{4}\cos 80^\circ + \dfrac{1}{4}\cos(180^\circ - 80^\circ) + \dfrac{1}{8}$

$= \dfrac{1}{4}\cos 80^\circ - \dfrac{1}{4}\cos 80^\circ + \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{8}$

よって，$\dfrac{1}{(\cos 20^\circ)\cdot(\cos 40^\circ)\cdot(\cos 80^\circ)} = 8$

(2) 和積公式

　加法定理を利用すると，正弦，余弦の和や差を，積に変形する公式も得られます。

和積公式

1. $\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

2. $\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

3. $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

4. $\cos A-\cos B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

1. $A=\alpha+\beta, B=\alpha-\beta$ とおくと，

$$\alpha=\frac{A+B}{2}, \beta=\frac{A-B}{2}$$

このとき，

$$\begin{aligned}\sin A+\sin B&=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\\&=2\sin\alpha\cos\beta\\&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\end{aligned}$$

2, 3, 4 も同様にして得られます。

$\boxed{注}$ A と B の大小関係が定まっているときは，大きい方を $\alpha+\beta$，小さい方を $\alpha-\beta$ とおくとよい。

例2

$\sin 20^\circ+\sin 40^\circ=\sin 80^\circ$ であることを示せ。

(解説)

$$\begin{aligned}\sin 20^\circ+\sin 40^\circ&=2\sin\frac{40^\circ+20^\circ}{2}\cos\frac{40^\circ-20^\circ}{2}\quad (A+B=40^\circ, A-B=20^\circ)\\&=2\sin 30^\circ\cos 10^\circ\\&=2\cdot\frac{1}{2}\cos 10^\circ\\&=\cos 10^\circ=\cos(90^\circ-80^\circ)=\sin 80^\circ\end{aligned}$$

例3
角 α，β，γ が $\alpha+\beta+\gamma=180°$，$\alpha\geqq 0°$，$\beta\geqq 0°$，$\gamma\geqq 0°$ を満たすとき，

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$$

を示せ。

解説

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1$

$=\cos\alpha+\cos\beta+\cos(180°-(\alpha+\beta))-1$

$=\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)-1$

$=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\left(2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}-1\right)-1$（$A+B=\alpha, A-B=\beta$）

$=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)$

$=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}$（$C-D=\dfrac{\alpha-\beta}{2}, C+D=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$）

$=4\cos\left(90°-\dfrac{\gamma}{2}\right)\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}$

$=4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$

$0°\leqq\alpha\leqq 180°$，$0°\leqq\beta\leqq 180°$，$0°\leqq\gamma\leqq 180°$ から

$0°\leqq\dfrac{\alpha}{2}\leqq 90°$，$0°\leqq\dfrac{\beta}{2}\leqq 90°$，$0°\leqq\dfrac{\gamma}{2}\leqq 90°$ より

$\sin\dfrac{\alpha}{2}\geqq 0$，$\sin\dfrac{\beta}{2}\geqq 0$，$\sin\dfrac{\gamma}{2}\geqq 0$

よって，

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma-1\geqq 0$

$\therefore\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\geqq 1$

例4
(1)　正弦に関する加法定理を用いて，

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

が成り立つことを示せ。

(2)　三角形 ABC の頂点 A，B，C の内角の大きさをそれぞれ A，B，C で表すことにする。$A=\dfrac{\pi}{3}$ のとき，$\sin B+\sin C$ および $\cos B+\cos C$，それぞれの範囲を求めよ。

(解説)

(1) 省略

(2) $\sin B+\sin C=2\sin\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$B+C=\dfrac{2\pi}{3}$ より

$$=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{B-C}{2}=\sqrt{3}\cos\frac{B-C}{2}$$

$B+C=\dfrac{2\pi}{3}$，$B>0$，$C>0$ から $-\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{B-C}{2}<\dfrac{\pi}{3}$ より

$$\frac{1}{2}<\cos\frac{B-C}{2}\leqq 1$$

よって

$$\frac{\sqrt{3}}{2}<\sin B+\sin C\leqq\sqrt{3}$$

$\cos B+\cos C=2\cos\dfrac{B+C}{2}\cos\dfrac{B-C}{2}$

$$=2\cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{B-C}{2}=\cos\frac{B-C}{2}$$

よって

$$\frac{1}{2}<\cos B+\cos C\leqq 1$$

例5

(1) $0<x<\pi$ とする。$\sin x+\sin 2x=0$ を満たす x の値は $\boxed{}$ である。

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$ を満たす x の値は小さい順に $\boxed{}$，$\boxed{}$ である。

(2) $0<x\leqq\pi$ とする。方程式 $\sin 3x+\sin x=\cos x$ の解 x をすべて求めると $\boxed{}$ である。

(3) 次の方程式を満たす x の値 $(0°\leqq x<360°)$ をすべて求めよ.

$\sin x+\sin 4x+\sin 7x=0$

(解説)

(1) $\sin x+\sin 2x=0$ ($A+B=2x, A-B=x$)

$$2\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}=0$$

$$\therefore\ \sin\frac{3}{2}x=0\ ,\ \cos\frac{x}{2}=0$$

$0<x<\pi$ より

$$\frac{3}{2}x=\pi \qquad \therefore\ x=\frac{2\pi}{3}$$

$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0$ ($A+B=3x, A-B=x$)

$\sin 2x(2\cos x+1)=0$

$$\therefore\ \sin 2x=0,\ \ \cos x=-\frac{1}{2}$$

$0<x<\pi$ より

$$2x=\pi, x=\frac{2\pi}{3} \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$$

別解 2 倍角，3 倍角の公式を利用してもできます。

(2) $\sin 3x+\sin x=\cos x$

$2\sin 2x\cos x=\cos x$ ($A+B=3x, A-B=x$)

$(2\sin 2x-1)\cos x=0$

$$\therefore\ \sin 2x=\frac{1}{2}, \cos x=0$$

$0<x\leqq\pi$ より

$$2x=\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, x=\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{2}$$

(3) $\sin x+\sin 4x+\sin 7x=0$

$2\sin 4x\cos 3x+\sin 4x=0$ ($A+B=7x, A-B=x$)

$\sin 4x(2\cos 3x+1)=0$

$$\therefore\ \sin 4x=0\ ,\ \cos 3x=-\frac{1}{2}$$

$0°\leqq x<360°$ より

$4x=0°, 180°, 360°, 540°, 720°, 900°, 1080°, 1260°$,

$3x=120°, 240°, 480°, 600°, 840°, 960°$

$\therefore\ x=0°, 40°, 45°, 80°, 90°, 135°, 160°, 180°, 200°, 225°, 270°, 280°, 315°, 320°$

(3) **一般角の利用**

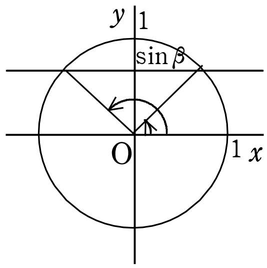
例6

(1)　2つの実数 α，β が $\sin\alpha=\sin\beta$ を満たすとき，α，β の値についてどのような関係式が成り立つかを答えよ。

(2)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin 4\theta=\cos\theta$ を満たす θ の値を求めよ。

(解説)

(1) $\sin\alpha=\sin\beta$



$\therefore\ \alpha=\beta+2n\pi\ ,\ \alpha=(\pi-\beta)+2n\pi$ (n は整数)

$\therefore\ \alpha-\beta=2n\pi\ ,\ \alpha+\beta=(2n+1)\pi$

別解 和積公式を利用

$\sin\alpha=\sin\beta$

$\sin\alpha-\sin\beta=0$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$$

$\therefore\ \dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{2}+n\pi\ ,\ \dfrac{\alpha-\beta}{2}=n\pi$ (n は整数)

$\therefore\ \alpha+\beta=(2n+1)\pi\ ,\ \alpha-\beta=2n\pi$

(2) $\sin 4\theta=\cos\theta$

$$\sin 4\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

(1)より

$$4\theta+\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=(2n+1)\pi\ ,\ 4\theta-\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=2n\pi$$

$$\therefore\ 3\theta=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\ ,\ 5\theta=\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi$$

$$\therefore\ \theta=\frac{4n+1}{6}\pi\quad\text{または}\quad\theta=\frac{4n+1}{10}\pi$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より

$$\theta=\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$$

別解 和積公式を利用しても解けます。

例7

(1) $m\,(m>1)$ を定数とする．$\sin mx=\sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ．

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で，方程式 $\sin 3x=\cos 2x$ を解け。

(3) $0<x<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で方程式 $\cos 3x=\sin 2x$ を満たす x の値は ア $\boxed{\quad}$ である。また，この x に対して，$\sin x$ の値は イ $\boxed{\quad}$ である。

解説

(1) $\sin mx=\sin x$

$$\therefore\ mx=x+2n\pi,\ (\pi-x)+2n\pi\ (\ n\text{ は整数})$$

$$\therefore\ x=\frac{2n}{m-1}\pi,\ \frac{2n+1}{m+1}\pi$$

(2) $\sin 3x=\cos 2x$

$$\sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\therefore\ 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2n\pi,\ \pi-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2n\pi\ (\ n\text{ は整数})$$

$$\therefore\ 5x=\frac{4n+1}{2}\pi,\ x=\frac{4n+1}{2}\pi$$

$$\therefore\ x=\frac{4n+1}{10}\pi,\ \frac{4n+1}{2}\pi$$

$0\leqq x\leqq\pi$ より

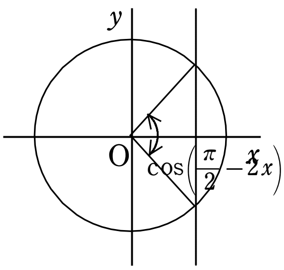
$$x=\frac{\pi}{10},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{9\pi}{10}$$

(3) sin に統一してもできますが，あえて cos に統一して解きます。

$\cos 3x=\sin 2x$

$$\cos 3x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$$

$$\therefore\ 3x=\frac{\pi}{2}-2x+2n\pi,\ -\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)+2n\pi\ (\ n\text{ は整数})$$



$$\therefore\ 5x=\frac{4n+1}{2}\pi,\ x=\frac{4n-1}{2}\pi$$

$$\therefore\ x=\frac{4n+1}{10}\pi,\ \frac{4n-1}{2}\pi$$

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ より，　$x=\dfrac{\pi}{10}$

このとき，

$$\cos 3x=\sin 2x$$

$$4\cos^3 x-3\cos x=2\sin x\cos x$$

$\cos x>0$ であるから，両辺 $\cos x$ で割って

$$4\cos^2 x-3=2\sin x$$

$4(1-\sin^2 x)-3=2\sin x$ から

$$4\sin^2 x+2\sin x-1=0$$

$\sin\dfrac{\pi}{10}>0$ より

$$\sin x=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

$\boxed{\text{別解}}$ これらの問題は sin , cos のどちらかに統一して，和積公式を利用しても解けます。

確認問題1

△ABCの3つの角 ∠A，∠B，∠Cのそれぞれの大きさを A，B，Cとする。

(1) $\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$ を余弦の加法定理から導け。

(2) (1)の結果を用いて $\cos A+\cos B\leqq 2\sin\dfrac{C}{2}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(3) (2)の結果を用いて $\cos A+\cos B+\cos C$ が最大となるとき，A，B，Cを求めよ。

(解説)

(1) $A=\alpha+\beta, B=\alpha-\beta$ とおくと，$\alpha=\dfrac{A+B}{2}, \beta=\dfrac{A-B}{2}$

$$\cos A+\cos B=2\cos\alpha\cos\beta$$
$$=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

(2) $A+B+C=\pi$ より，$A+B=\pi-C$

(1)より

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A-B}{2}$$
$$=2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$0<\dfrac{C}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\sin\dfrac{C}{2}>0$

$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ であるから，$\cos\dfrac{A-B}{2}\leqq 1$ より

$$\cos A+\cos B\leqq 2\sin\frac{C}{2}$$

等号成立は，$\cos\dfrac{A-B}{2}=1$ すなわち $A=B$ のとき

(3) (2)の結果より

$$\cos A+\cos B+\cos C\leqq 2\sin\frac{C}{2}+\cos C$$

等号成立は$A=B$のとき

$A=B$のとき

$$2\sin\frac{C}{2}+\cos C=2\sin\frac{C}{2}+\left(1-2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=-2\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{C}{2}+1$$

$$=-2\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$$

ここで，$0<\frac{C}{2}<\frac{\pi}{2}$であるから$0<\sin\frac{C}{2}<1$より

$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$のとき最大

このとき，

$$\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\qquad\therefore\ \frac{C}{2}=\frac{\pi}{6}\qquad\therefore\ C=\frac{\pi}{3}$$

$A+B=\pi-C$かつ$A=B$であるから

$$A=B=\frac{\pi}{3}$$

よって，$\cos A+\cos B+\cos C$が最大となるとき，$A=B=C=\frac{\pi}{3}$

確認問題2

A, B, C を三角形の内角とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1)　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\left(1-\sin\dfrac{C}{2}\right)$

(2)　$\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2} \leqq \dfrac{1}{8}$

(3)　$\sin A+\sin B+\sin C \geqq 4\sin A\sin B\sin C$

(4)　三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすると，$R \geqq 2r$ であり，等号は正三角形のときにのみ成り立つ．

解説

(1) $\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2} = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{A-B}{2}-\cos\dfrac{A+B}{2}\right)$

$A+B+C=\pi$ であるから

$$\cos\frac{A+B}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)=\sin\frac{C}{2}$$

$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{A-B}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\dfrac{A-B}{2} \leqq 1$ より

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} \leqq \frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)$$

(2) (1)より

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{2}\sin\frac{C}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{8} \leqq \frac{1}{8}$$

(3) $4\sin A\sin B\sin C$

$=32\sin\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\cos\dfrac{C}{2}$

$\leqq 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$ ((2)より)

$=2\left(\cos\dfrac{A+B}{2}+\cos\dfrac{A-B}{2}\right)\cos\dfrac{C}{2}$

$=\cos\dfrac{A+B+C}{2}+\cos\dfrac{A+B-C}{2}+\cos\dfrac{A-B+C}{2}+\cos\dfrac{A-B-C}{2}$

$=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-C\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\mathrm{B}\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-A\right)$

$=\sin A+\sin B+\sin C$

等号が成り立つのは，(1)より $A=B$ のときで，かつ，

(2) より $\sin\dfrac{C}{2}=\dfrac{1}{2}$ ，すなわち， $C=\dfrac{\pi}{3}$ のときであるから，

$A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$ ，すなわち，正三角形のときである

(4) 三角形の 3 辺の長さを a, b, c とすると

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R \cdots ①$$

また，三角形の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

$$\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}(a+b+c)r$$

①より

$$4R^2\sin A\sin B\sin C=2R(\sin A+\sin B+\sin C)r$$

$$\therefore\ R=\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{2\sin A\sin B\sin C}r \quad (\sin A, \sin B, \sin C>0)$$

(3)から $\dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{\sin A\sin B\sin C}\geqq 4$ より

$$R\geqq 2r$$

また，(3)より，等号成立は正三角形のときのみである

確認問題3

(1) $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0$ を満たす x を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とするとき，x に関する不等式 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x<0$ の解は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\pi<x<\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi$ である。

解説

(1) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x$

$=(\sin 4x+\sin x)+(\sin 3x+\sin 2x)$

$=2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{3}{2}x+2\sin\frac{5}{2}x\cos\frac{x}{2}$

$=2\sin\frac{5}{2}x\left(\cos\frac{3}{2}x+\cos\frac{x}{2}\right)$

$=4\sin\frac{5}{2}x\cos x\cos\frac{x}{2}$ より

$\sin\frac{5}{2}x\cos x\cos\frac{x}{2}=0$

$0<x<\frac{\pi}{2}$ から， $0<\frac{x}{2}<\frac{\pi}{4}$，$0<\frac{5}{2}x<\frac{5}{4}\pi$ より

$\frac{5}{2}x=\pi \quad \therefore\ x=\frac{2}{5}\pi$

(2) 同様にして

$4\sin\frac{5}{2}x\cdot\cos x\cdot\cos\frac{x}{2}<0$

$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ より $0\leqq\frac{5}{2}x\leqq\frac{5}{4}\pi$，$0\leqq\frac{x}{2}\leqq\frac{\pi}{4}$

$x=0$ のとき $\sin\frac{5}{2}x=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ のとき $\cos x=0$ より

$x=0$，$\frac{\pi}{2}$ はこの不等式の解ではない

$0<x<\frac{\pi}{2}$ の範囲では常に $\cos x>0$，$\cos\frac{x}{2}>0$ であるから

$\sin\frac{5}{2}x<0$

$0<\frac{5}{2}x<\frac{5}{4}\pi$ より， $\pi<\frac{5}{2}x<\frac{5}{4}\pi \quad \therefore\ \frac{{}^{ア}2}{{}_{イ}5}\pi<x<\frac{{}^{ウ}1}{{}_{エ}2}\pi$

確認問題4

(1)　三角関数の加法定理を用いて，次の等式を示せ。

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$$

(2)　Nを自然数とする。次の等式を示せ。

$$(\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos Nx)\times 2\sin\frac{x}{2}=\sin\left(Nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}$$

(3)　$0<x<2\pi$ の範囲で $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$ を満たす x をすべて求めよ。

(解説)

(1) 省略

(2) (1)から

$$2\cos x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{3}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$$2\cos 2x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{5}{2}x-\sin\frac{3}{2}x$$

$$2\cos 3x\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{7}{2}x-\sin\frac{5}{2}x$$

$\cdots\cdots$

$$2\cos Nx\sin\frac{x}{2}=\sin\left(Nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\left(Nx-\frac{x}{2}\right)$$

より

$$(\cos x+\cos 2x+\cdots\cdots+\cos Nx)\times 2\sin\frac{x}{2}=\sin\left(Nx+\frac{x}{2}\right)-\sin\frac{x}{2}$$

(3) (2) において，$N=4$ のとき

$$(\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x)\times 2\sin\frac{x}{2}=\sin\frac{9}{2}x-\sin\frac{x}{2}$$

$0<\dfrac{x}{2}<\pi$ から $\sin\dfrac{x}{2}\neq 0$ より

$\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0$ のとき

$$\sin\frac{9}{2}x-\sin\frac{x}{2}=0$$

$$2\cos\frac{5}{2}x\sin 2x=0$$

$0<x<2\pi$ から，$0<\dfrac{5}{2}x<5\pi$, $0<2x<4\pi$ より

$$\frac{5}{2}x=\frac{\pi}{2},\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{5}{2}\pi,\ \frac{7}{2}\pi,\ \frac{9}{2}\pi,\ 2x=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi$$

$$\therefore x=\frac{\pi}{5},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{5}\pi,\ \pi,\ \frac{7}{5}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{9}{5}\pi$$

確認問題5

$0\leqq\alpha<2\pi$，$0\leqq\beta<2\pi$ とする。このとき，2つの等式 $\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$ が同時に成り立つための必要十分条件を α と β の関係式で表せ。

解説

$\sin\alpha=\cos\beta$，$\cos\alpha=\sin\beta$

$\sin\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$，$\cos\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)$

これらをともに満たすとき

$$\alpha=\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)+2n\pi\ (n\text{ は整数})$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}+2n\pi$$

$0\leqq\alpha+\beta<4\pi$ より

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$$

確認問題6

2 次方程式 $4x^2+2x-1=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。

(1)　$\alpha=\cos\theta$ となる角 θ が，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つだけ存在することを示せ。以下，θ は (1) で定まるものとする。

(2)　$\beta=\cos 2\theta$ であることを示せ。

(3)　θ の値を求めよ。

(4)　$\sin\dfrac{3\theta}{4}$ を求めよ。

(解説)

(1) $4x^2+2x-1=0$

$\alpha>\beta$ より

$$\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4},\ \beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$$

$$\therefore 0<\alpha<\frac{1}{2}$$

$\cos x$ は $\dfrac{\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少，$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$，$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$ であるから

$\cos\theta=\alpha$ となる θ が $\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲にただ 1 つだけ存在する

(2) $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}=\beta$

(3) $\cos 4\theta=2\cos^2 2\theta-1=2\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)^2-1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}=\cos\theta$

$4\theta=\theta+2n\pi,\ -\theta+2n\pi$ (n は整数)

$$\therefore \theta=\frac{2n}{3}\pi,\ \frac{2n}{5}\pi$$

$\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より，　$\theta=\dfrac{2\pi}{5}$

(4) $\sin\dfrac{3\theta}{4}=\sin\dfrac{3\pi}{10}=\cos\dfrac{\pi}{5}=-\cos\dfrac{4\pi}{5}=-\beta$ より

$$\sin\frac{3\theta}{4}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$$